

SURFACES DE RIEMANN

TD n° 4

Thèmes : *Théorème de Riemann-Roch, courbes algébriques.*

Exercice 1

Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe plane de degré 2. Montrer que C est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ (indication: considérer un point fixe $c \in C$, et associer à chaque point $t \in \mathbb{P}^1$ l'intersection de C et d'une droite projective issue de c).

Exercice 2

Le but de l'exercice est de montrer qu'une surface de Riemann compacte X de genre 2 admet un morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de degré 2.

1. Montrer que $h^0(K_X) = \deg(K_X) = 2$.
2. Montrer qu'il existe un diviseur effectif D linéairement équivalent à K_X de degré 2.
3. Soit $f \in \mathcal{O}_X(D)$. Montrer que l'application induite $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ a degré 2.

Exercice 3

Soit $X = \mathbb{C}/\Lambda$ un tore complexe.

1. Calculer le genre de X .
2. Soit $L \rightarrow X$ un fibré en droites holomorphe sur X . Calculer $h^0(L)$ en fonction de $\deg(L)$ et de la trivialité ou non de L .

Exercice 4

Soit X une surface de Riemann compacte et D_1, D_2 deux diviseurs effectifs à supports disjoints. Montrer que $D_1 \sim D_2$ si et seulement s'il existe $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ telle que $D_1 = f^*(0)$ et $D_2 = f^*(\infty)$. On rappelle que le pull-back d'un point $x \in X$ par une fonction holomorphe $f : Y \rightarrow X$ est défini par $f^*x = \sum_{f(y)=x} m_y(f) \cdot (y)$.

Exercice 5

Soit $X = \mathbb{C}/\Lambda$ un tore complexe de dimension un, et soit $f \in \mathcal{M}_X(X)$. On écrit $\text{div}(f) = \sum a_i(x_i)$ avec $x_i \in X$. On note $A(f) = \sum a_i \cdot x_i$ où $+$ est la loi de groupe sur X héritée de $\mathbb{C}$. On veut montrer que $A(f) = 0$.

1. Soit $h = \pi^*f$ où $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ est la projection canonique, et soit γ un parallélogramme sur $\mathbb{C}$ dont les sommets sont de la forme $p, p+1, p+\tau, p+1+\tau$ ($\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$) et qui évite les pôles de h . Montrer par un calcul explicite que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} z \frac{h'(z)}{h(z)} dz \in \Lambda.$$

2. Conclure en utilisant le théorème des résidus.

Exercice 6

Soit $X = \{[x : y : z : w] \in \mathbb{P}^3; xw = yz, xz = y^2, yw = z^2\}$.

1. Montrer que X est une surface de Riemann.

2. Montrer que X a degré 3 à l'aide de l'hyperplan $x = 0$.

Exercice 7

Soit X une surface de Riemann compacte $f = (f_0, \dots, f_N)$ la donnée de $N + 1$ fonctions méromorphes non toutes nulles sur X . On note

$$\Sigma = \{\text{zéros communs des } f_i\} \cup \bigcup_i \{\text{pôles de } f_i\}$$

On définit $\varphi_f : X \setminus \Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^N$ par $\varphi_f(x) = [f_0(x) : \dots : f_N(x)]$.

1. Montrer que φ_f est holomorphe.
2. Montrer qu'il existe une application holomorphe $\bar{\varphi}_f : X \rightarrow \mathbb{P}^N$ qui étende φ_f .
3. Inversement, soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^N$ une application holomorphe. Montrer qu'il existe $f = (f_0, \dots, f_N)$ méromorphe telle que $\varphi = \bar{\varphi}_f$.
4. Montrer que $\bar{\varphi}_f = \bar{\varphi}_g$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathcal{M}_X(X)$ telle que $f = \lambda g$.