Surfaces de Riemann

Td n° 1

***Thèmes** : Fonctions et formes méromorphes, morphismes.*

Exercice 1 – *Fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$.*

1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle qu'il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leqslant C(|z|^N + 1).$$
En utilisant la formule de Cauchy, montrer que f est un polynôme.
2. En déduire que toute fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ est une fraction rationnelle.

Solution de l'exercice 1

On écrit $f(z) = \sum a_n z^n$, alors $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$ vérifie $|a_n| \leqslant C' R^{N-n}$ pour C' assez grand. Pour la seconde question, on peut supposer sans perte de généralité que f est holomorphe sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{P}^1 \backslash \{\infty\}$. Alors la méromorphie de f en $+\infty$ garantit que $z^N f(1/z)$ est borné quand $z \to 0$ pour un certain entier N. On utilise alors la question précédente.

Exercice 2 – *Formes holomorphes sur $\mathbb{P}^1$.*

Montrer qu'il n'existe pas de forme différentielle holomorphe non nulle sur $\mathbb{P}^1$.

Solution de l'exercice 2

Soit ω une telle forme. Alors ω donne lieu à deux formes holomorphes $f(z)dz$ et $g(w)dw$ sur $\mathbb{C}$ telles que sur $\mathbb{C}^*$, on ait $g(1/z) \cdot \frac{-dz}{z^2} = f(z)dz$. En particulier, $g(1/z) = -z^2 f(z)$ tend vers 0 quand $z \to 0$. Donc g s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{P}^1$ nulle à l'infini. Par le principe du maximum, $g \equiv 0$.

Exercice 3 – *Tores complexes de dimension 1.*

1. Soit Γ un réseau de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $\tau \in \mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ tel que $\mathbb{C}/\Gamma$ est isomorphe à $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$, où $\Lambda_\tau := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$.
2. Soit $\tau \in \mathscr{H}$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\tau' = g \cdot \tau := \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Montrer que les tores $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ et $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$ sont isomorphes.
3. Soient $\tau, \tau' \in \mathscr{H}$, et $f : \mathbb{C}/\Lambda_\tau \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$ un biholomorphisme. Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\tau' = g \cdot \tau$.

Solution de l'exercice 3

1. On écrit $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, et on pose $\tau = \pm\omega_2/\omega_1$ de sorte que $\tau \in \mathscr{H}$. Alors la multiplication par ω_1 induit un isomorphisme entre $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ et $\mathbb{C}/\Gamma$.

2. Supposons $\tau' = g \cdot \tau$. Alors par la question précédente, on a : $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau'} \simeq \mathbb{C}/((c\tau+d)\mathbb{Z} + (a\tau+b)\mathbb{Z})$. Or, $(c\tau+d)\mathbb{Z} + (a\tau+b)\mathbb{Z} = (b\mathbb{Z} + d\mathbb{Z}) + \tau(a\mathbb{Z} + c\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ car a et c (resp. b et d) sont premiers entre eux étant donnée la relation $ad - bc = 1$.

3. On sait que f se relève en une application holomorphe $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, vérifiant $f \circ p = p' \circ F$, où $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ (idem avec p' et τ'). On peut choisir $F(0) = 0$. En faisant la même chose pour $g = f^{-1}$, on trouve une application holomorphe $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant $g \circ p' = p \circ G$. Ainsi, $p = g \circ f \circ p = g \circ p' \circ F = p \circ G \circ F$, et de même $p' = p' \circ F \circ G$. On en déduit que pour tout $z \in \Lambda$, il existe $\lambda(z) \in \Lambda_\tau$ tel que $G \circ F(z) = z + \lambda(z)$. Ainsi, λ est une fonction continue sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans un ensemble discret, donc elle est constante, et sa valeur en 0 étant 0, la fonction est identiquement nulle. Ainsi, $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, et on peut faire de même avec $F \circ G$, ce qui montre que F est un biholomorphisme de $\mathbb{C}$. Comme $F(0) = 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $F(z) = \alpha z$.

Par ailleurs, il est facile de voir que $F(\Lambda_\tau) \subset \Lambda_{\tau'}$, et $G(\Lambda_{\tau'}) \subset \Lambda_\tau$, donc $\Lambda_{\tau'} = \alpha\Lambda_\tau$. Ainsi, on peut écrire $\alpha\tau = a\tau' + b$ et $\alpha = c\tau' + d$ pour des entiers a, b, c, d de sorte que $\tau' = g \cdot \tau$ pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme $(a\tau' + b, c\tau' + d)$ forme une base de $\Lambda_{\tau'}$, on a $g \in GL_2(\mathbb{Z})$. Enfin, on peut vérifier que $\operatorname{Im} \tau' = \frac{\det(g)}{|c\tau+d|^2} \operatorname{Im} \tau$, donc $\det(g) > 0$, puis finalement $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 4 – *Ramification.*

Déterminer les points de ramification (et leur multiplicité) de la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Est-ce que f est ramifiée à l'infini vue comme fonction holomorphe $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$?

Solution de l'exercice 4

$f'(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{-1, +1\}$, donc f est ramifiée au dessus de ± 1. Par ailleurs, f est de degré deux donc l'ordre de ramification en ± 1 est égal à 2. Enfin, $f^{-1}(\infty) = \{0, \infty\}$ donc f n'est pas ramifiée en $+\infty$. Une autre manière de voir les choses est de considérer le voisinage $U = \mathbb{P}^1 \backslash \{0\}$ de $\infty \in \mathbb{P}^1$ et la trivialisation $\varphi : U \to \mathbb{C}$ qui envoie ∞ sur 0 et $w \in \mathbb{P}^1 \backslash \{0, \infty\}$ sur $1/w$. Alors $g := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ s'écrit $g(w) = \frac{2w}{w^2+1}$ pour $w \in \mathbb{C}$. On a alors $g'(0) = 2 \neq 0$. De même en 0, on a $\varphi \circ f(w) = \frac{2w}{w^2+1}$.

Exercice 5 – *Isomorphismes entre surfaces épointées.*

Soient X, Y deux surfaces de Riemann compactes, et soient $\Sigma_X \subset X$ et $\Sigma_Y \subset Y$ deux ensembles finis. Supposons qu'il existe $f : X \backslash \Sigma_X \to Y \backslash \Sigma_Y$ un biholomorphisme.

1. En supposant que $|\Sigma_Y| = 1$, montrer que f s'étend en un biholomorphime $\hat{f} : X \to Y$.
2. Dans le cas général, admettons le fait suivant : pour tout point y de Y, il existe une fonction méromorphe $g_y : Y \to \mathbb{C}$ qui soit holomorphe sur $Y \backslash \{y\}$. Montrer alors qu'on peut trouver une fonction holomorphe $g : Y \to \mathbb{P}^1$ qui induise une injection $g|_{\Sigma_Y} : \Sigma_Y \to \mathbb{C}$.
3. Montrer que $g \circ f$ s'étend à X, et conclure que f s'étend en un isomorphisme entre X et Y.

Solution de l'exercice 5

1. Soit $x \in \Sigma_X$, et soit (x_n) une suite de $X \backslash \Sigma_X$ convergeant vers x. Par propreté de f, toute valeur d'adhérence de $f(x_n)$ appartient à Σ_Y. Cela prouve la première question car f s'étend alors par continuité.
2. Notons $\Sigma_Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ et soit $g_i : Y \to \mathbb{P}^1$ une fonction méromorphe dont le seul pôle est en y_i. Quitte à translater par des constantes, on peut supposer que pour tous i, j, on a $g_i(y_j) \neq 0$. Soit $a_i := \prod_{j \neq i} g_j(y_i) \in \mathbb{C}^*$, et $g := \sum_{i=1}^m \frac{i a_i}{g_1 \cdots \hat{g}_i \cdots g_m}$; c'est une fonction méromorphe telle que $g(y_i) = i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.
3. Les pôles de la fonction g ci-dessus appartiennent à $Y \backslash \Sigma_Y$. Soit $h := g \circ f$. Par propreté de f, on peut trouver un petit voisinage $U \subset X$ de Σ_X tel que $h|_{U \backslash \Sigma_X}$ soit d'image bornée. En particulier, h s'étend en une fonction holomorphe à travers Σ_X. Soit x_n une suite convergeant vers un élément $x \in \Sigma_X$. On sait que toute valeur d'adhérence $\bar{y}$ de $f(x_n)$ appartient à Σ_Y. Comme $h(x_n) = g(f(x_n))$, on a que $h(x) = g(\bar{y})$ et donc $\bar{y} \in g^{-1}(h(x)) \cap \Sigma_Y$. Comme g est injective en restriction à Σ_Y, $\bar{y}$ est uniquement déterminé et ainsi la suite $(f(x_n))$ est bien convergente. Ainsi

f s'étend par continuité, et donc holomorphiquement en $\hat{f} : X \to Y$. Rappelons que $\hat{f}$ est ouverte. Cela implique clairement la surjectivité de $\hat{f}$, ainsi que son injectivité. En effet, si $\hat{f}(x) = \hat{f}(x')$, alors deux petits voisinages disjoints U, U' de x, x' respectivement vont vérifier que l'ouvert non vide $\hat{f}(U) \cap \hat{f}(U')$ contient un élément de $Y \backslash \Sigma_Y$, ce qui est une contradiction avec l'injectivité de f.