Surfaces de Riemann

Td n° 1

***Thèmes** : Fonctions et formes méromorphes, morphismes.*

Exercice 1 – *Fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1$.*

1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle qu'il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leqslant C(|z|^N + 1).$$
En utilisant la formule de Cauchy, montrer que f est un polynôme.
2. En déduire que toute fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ est une fraction rationnelle.

Exercice 2 – *Formes holomorphes sur $\mathbb{P}^1$.*

Montrer qu'il n'existe pas de forme différentielle holomorphe non nulle sur $\mathbb{P}^1$.

Exercice 3 – *Tores complexes de dimension 1.*

1. Soit Γ un réseau de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $\tau \in \mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ tel que $\mathbb{C}/\Gamma$ est isomorphe à $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$, où $\Lambda_\tau := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$.
2. Soit $\tau \in \mathscr{H}$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $\tau' = g \cdot \tau := \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Montrer que les tores $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ et $\mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$ sont isomorphes.
3. Soient $\tau, \tau' \in \mathscr{H}$, et $f : \mathbb{C}/\Lambda_\tau \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda_{\tau'}$ un biholomorphisme. Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\tau' = g \cdot \tau$.

Exercice 4 – *Ramification.*

Déterminer les points de ramification (et leur multiplicité) de la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Est-ce que f est ramifiée à l'infini vue comme fonction holomorphe $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$?

Exercice 5 – *Isomorphismes entre surfaces épointées.*

Soient X, Y deux surfaces de Riemann compactes, et soient $\Sigma_X \subset X$ et $\Sigma_Y \subset Y$ deux ensembles finis. Supposons qu'il existe $f : X\backslash\Sigma_X \to Y\backslash\Sigma_Y$ un biholomorphisme.

1. En supposant que $|\Sigma_Y| = 1$, montrer que f s'étend en un biholomorphime $\hat{f} : X \to Y$.
2. Dans le cas général, admettons le fait suivant : pour tout point y de Y, il existe une fonction méromorphe $g_y : Y \to \mathbb{C}$ qui soit holomorphe sur $Y\backslash\{y\}$. Montrer alors qu'on peut trouver une fonction holomorphe $g : Y \to \mathbb{P}^1$ qui induise une injection $g|_{\Sigma_Y} : \Sigma_Y \to \mathbb{C}$.
3. Montrer que $g \circ f$ s'étend à X, et conclure que f s'étend en un isomorphisme entre X et Y.