MÉTHODES ANALYTIQUES POUR L'ÉTUDE DES SINGULARITÉS EN GÉOMÉTRIE COMPLEXE

par

Henri Guenancia

Résumé. — Nous donnons dans ce travail un panorama des méthodes récentes et fondamentales dans l'étude des singularités des fonctions plurisousharmoniques, avec en point de mire le théorème de semi-continuité de l'exposant de singularité complexe, démontré par Demailly et Kollár. On présentera d'abord un aperçu de la notion de fonction plurisousharmonique, avant d'introduire les objets caractéristiques qu'on leur attache pour mesurer leurs singularités. Au passage, nous donnons une description précise de l'idéal multiplicateur associé à une fonction psh radiale, étendant ainsi le théorème de Howald au cadre analytique. On évoquera ensuite les résultats fondamentaux de la théorie L^2, du théorème d'extension d'Ohsawa-Takegoshi au théorème d'annulation de Nadel, puis nous proposons une définition analytique des idéaux adjoints, nous permettant de retrouver une version qualitative du théorème de Manivel. Alors, en utilisant de manière cruciale les résultats d'approximation de Demailly, nous donnerons la preuve du théorème de semi-continuité. Enfin, nous donnerons une application naturelle de ce dernier résultat, à savoir un critère géométrique dû à Nadel garantissant l'existence de métriques de Kähler-Einstein sur les variétés de Fano.

sous la direction de Sébastien Boucksom

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement Sébastien Boucksom, qui, avec une généreuse disponibilité, m'a initié à la complexité de la recherche, m'a engagé et guidé dans des voies fécondes et passionnantes, et a constamment accordé bienveillance et intérêt à mes questions les plus diverses.

Je voudrais aussi remercier Andreas Höring, dont l'enseignement m'a fait découvrir la géométrie complexe et qui m'a donné l'envie de continuer à en faire... tous les jours !

Enfin, je souhaite exprimer ici mon amicale gratitude envers Olivier Taïbi, que j'ai bien souvent sollicité, et qui a toujours accepté de faire de mes interrogations les siennes.

Table des matières

PARTIE I
PLURISOUSHARMONICITÉ

Dans cette partie, nous faisons un tour d'horizon de la notion de fonction plurisousharmonique en se concentrant aussi sur la notion d'exposant de singularité complexe, qui est l'objet du théorème de semi-continuité de Demailly et Kollár que nous démontrerons dans la troisième partie. Si les fonctions plurisousharmoniques ont été introduites il y a déjà quelques temps ($\sim$ 1942), certains outils essentiels tels que les faisceaux d'idéaux multiplicateurs sont eux plutôt récents (années 90), et ainsi l'objectif de cette première partie va être d'introduire naturellement la notion de plurisousharmonicité afin de préparer à la deuxième partie qui expliquera les méthodes modernes et présentera quelques résultats récents.

Dans cette section, qui se veut un aperçu suffisamment général pour la suite de la théorie des fonctions plurisousharmoniques, nous ne donnerons pas toutes les preuves (loin de là !), car elles sont essentiellement présentes dans les livres de références [**Dem**], [**Hö94**], [**Lel68**] ou encore [**Kra92**], et les recopier systématiquement ne présente vraisemblablement pas beaucoup d'intérêt.
Nous avons choisi de ne pas redéfinir la notion de courant, et en particulier celle de courant positif, en préférant renvoyer le lecteur à l'article introductif d'une grande clarté de Jean-Pierre Demailly [**Dem92**].

1. Fonctions sous-harmoniques

La notion de fonction sous-harmonique est assez large, et est à la base une notion développée en dimension réelle égale à deux, en lien étroit avec le problème de Dirichlet. Dans [**Kra92**], l'approche choisie est de définir une fonction sous-harmonique par une propriété de type qualitatif, en pratique difficilement vérifiable ad hoc.
Ici, nous donnons directement une définition maniable, pour en déduire ensuite les propriétés attendues.

Pour simplifier l'écriture, on va fixer quelques notations concernant les moyennes sur les boules ou les sphères d'une fonction borélienne u (majorée ou minorée) sur une boule $\bar{B}(a,r) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mu_B(u;a,r) := \frac{1}{\mu(B(a,r))} \int_{B(a,r)} u(x)d\mu(x),$$

$$\mu_S(u;a,r) := \frac{1}{\mu(S(a,r))} \int_{S(a,r)} u(x)d\sigma(x).$$

Définition 1.1. — Soit $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty[$ une fonction semi-continue supérieurement. On dit que u est sous-harmonique si pour toute boule $\bar{B}(a,r) \subset \Omega$, on a

$$u(a) \leqslant \mu_B(u;a,r).$$

En fait, on peut de manière équivalente demander l'inégalité sur des sphères :

Proposition 1.2. — *Soit $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty[$ une fonction semi-continue supérieurement. Alors on a équivalence :*

(*i*) *u est sous-harmonique ;*

(*ii*) $u(a) \leqslant \mu_S(u;a,r), \quad \forall \bar{B}(a,r) \subset \Omega.$

Remarque 1.
Une remarque importante est qu'une fonction sous-harmonique est déterminée par sa donnée presque partout : en effet, on a l'inégalité suivante pour tout $z_0 \in \Omega$:

$$\limsup_{r\to 0} \sup_{z\in B(z_0,r)} u(z) \leqslant u(z_0) \leqslant \limsup_{r\to 0} \mu_B(u;a,r) \leqslant \limsup_{r\to 0} \sup_{z\in B(z_0,r)} u(z)$$

grâce à la semi-continuité supérieure pour l'inégalité de gauche, et par définition de la sous-harmonicité pour l'inégalité de droite. Ainsi $u(z_0) = \limsup_{r\to 0} \mu_B(u;a,r)$ est déterminée par sa valeur sur un ensemble de mesure pleine.

Des définitions, on peut déduire sans grande difficulté deux propriétés fondamentales des fonctions sous-harmoniques :

Théorème 1.3. — *Si Ω est connexe et si u est sous-harmonique sur Ω, alors soit $u \equiv -\infty$, soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Ce résultat de locale intégrabilité est important car il nous permet de voir une fonction sous-harmonique comme une distribution, et en particulier d'étudier les propriétés différentielles de telles fonctions.

On connaît bien le principe du maximum pour les fonctions holomorphes (plus précisément leur module) ; en fait l'énoncé se généralise à la vaste classe des fonctions sous-harmoniques :

***Théorème 1.4* (Principe du maximum)**. — *Si u est sous-harmonique sur Ω, alors :*

$$\sup_\Omega u = \limsup_{\Omega\ni z\to\partial\Omega\cup\{\infty\}} u(z).$$

On passe maintenant aux propriétés de type différentiel, c'est à dire essentiellement faisant usage du laplacien.

Pour commencer, en utilisant la formule de Green, on peut montrer (cf [**Dem**]) qu'on dispose de la formule suivante, appelée parfois formule de Gauss :

$$\mu_S(u;a,r) = u(a) + \frac{1}{n}\int_0^r \mu_B(\Delta u;a,t)\, t\, dt. \tag{1.1}$$

Remarque 2.
Ceci montre qu'une fonction u de classe $\mathscr{C}^2$ est sous-harmonique si et seulement si son laplacien vérifie $\Delta u \geqslant 0$.

Le résultat suivant, qui permet d'approcher de manière décroissante une fonction sous-harmonique par des fonctions lisses va être d'un usage systématique par la suite :

Théorème 1.5. — *Soit u une fonction sous-harmonique sur Ω telle que $u \not\equiv -\infty$ sur chaque composante connexe de Ω*
Alors pour toute famille (ρ_ϵ) de noyaux radiaux régularisants, alors $u\star\rho_\epsilon$ est sous-harmonique lisse sur $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega;\, d(x,{}^c\Omega) > \epsilon\}$, et de plus la famille $(u\star\rho_\epsilon)$ est croissante en ϵ et $\lim_{\epsilon\to 0} u\star\rho_\epsilon = u$.

Démonstration. — On commence par le cas où u est $\mathscr{C}^2$. Alors, si $\rho(x) = \widetilde{\rho}(|x|)$, et $\sigma_{n-1} = \mu(S(a,r))\, r^{1-n}$:

$$u \star \rho_\epsilon(a) = \int_{B(0,1)} u(a+\epsilon x)\rho(x)d\lambda = \sigma_{n-1}\int_0^1 \mu_S(u;a,\epsilon t)\widetilde{\rho}(t)t^{n-1}dt. \tag{1.2}$$

Or, la formule de Gauss 1.1 nous montre que $\mu_S(u;a,r)$ est croissante en r, donc $\epsilon \mapsto u\star\rho_\epsilon(a)$ est bien croissante.
Dans le cas général, il est facile de voir que u est sous-harmonique si et seulement si on a l'inégalité

$$u \leqslant u \star \mu_r \quad \text{sur } \Omega_r, \quad \forall r > 0,$$

où μ_r désigne la (densité de la) mesure de probabilité uniforme sur $B(0,r)$. Ainsi, comme la convolution par une fonction positive préserve l'ordre, on a $u\star\rho_\epsilon \leqslant u\star\rho_\epsilon\star\mu_r$ sur $\Omega_{r+\epsilon}$ et donc $u\star\rho_\epsilon$ est sous-harmonique lisse sur Ω_ϵ.
On peut donc appliquer le résultat de croissance déjà montré dans le cas lisse pour dire que $u\star\rho_\epsilon\star\rho_\eta$ est croissant en η, et par symétrie, il est croissant en ϵ, et il en est donc de même de $\lim_{\eta\to 0} u\star\rho_\epsilon\star\rho_\eta = u\star\rho_\epsilon$.
Enfin, comme

$$\sigma_{n-1}\int_0^1 \widetilde{\rho}(t)t^{n-1}dt = 1,$$

l'équation (1.2) montre que $u\star\rho_\epsilon \geqslant u$; de plus la remarque 1 jointe au principe du maximum montre que $u = \limsup_{r\to 0}\mu_S(u;\cdot,r)$, et alors le lemme de Fatou (on peut se ramener au cas où u est négative au voisinage du point considéré, par semi-continuité inférieure) appliqué à l'équation (1.2) montre qu'on a $\limsup_{\epsilon\to 0} u\star\rho_\epsilon \leqslant u$, donc finalement, $\lim_{\epsilon\to 0} u\star\rho_\epsilon = u$ ce qui conclut. □

Muni du théorème précédent, on peut énoncer un résultat crucial reliant la notion de sous-harmonicité, intrinsèquement liée à des propriétés de moyennes, à une propriété différentielle, qui est le prolongement naturel de la remarque 2 :

Théorème 1.6. — *Soit u une fonction sous-harmonique sur Ω telle que $u \not\equiv -\infty$ sur chaque composante connexe de Ω. Alors Δu est une mesure positive.*
Réciproquement, si $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est telle que Δv est une mesure positive, alors il existe une unique fonction u sous-harmonique sur Ω telle que v soit la distribution associée à u.

Démonstration. — L'idée est de considérer $v_\epsilon = v\star\rho_\epsilon$ qui est sous-harmonique et lisse d'après le cas $\mathscr{C}^2$. On voit ensuite que (v_ϵ) est croissant en ϵ, donc on peut construire sa limite simple u, sous-harmonique. Alors, comme v_ϵ tend faiblement vers v, le théorème de convergence monotone montre que u représente bien v. Quant à l'unicité, elle réside dans le fait qu'il existe une unique fonction sous-harmonique qui coïncide avec u presque partout, ajouté au fait que deux fonctions localement intégrables égales au sens des distributions sont égales presque partout. □

Pour finir, on donne le résultat suivant, point clé dans le théorème de Hartogs concernant le prolongement des fonctions holomorphes définies en dehors d'un compact en dimension complexe supérieure ou égale à 2. Nous nous en servirons lors de l'étude des fonctions quasi-psh, et plus précisément pour établir un théorème de compacité L^p.

***Théorème 1.7* (Lemme d'Hartogs).** — *Soit (u_n) une suite de fonctions sous-harmoniques sur $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ localement uniformément majorées. On suppose que*

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n(x) \leqslant M$$

pour tout $x \in \Omega$, et pour une certaine constante M. Alors pour tout $\epsilon > 0$ et tout compact $K \subset \Omega$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\sup_{x\in K} u_n(x) \leqslant M + \epsilon.$$

Démonstration. — Le résultat est local, donc on peut supposer que toutes les fonctions u_n sont négatives, et $M \leqslant 0$. Puis, par compacité de K, on se ramène à prouver que pour tout $\epsilon > 0$ et $a \in \Omega$, il existe $\delta > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geqslant n_0$, on ait

$$\sup_{x\in \bar{B}(a,\delta)} u_n(x) \leqslant M + \epsilon.$$

On fixe donc $a \in \Omega$ et $\epsilon > 0$. On considère alors $r > 0$ tel que $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$, puis on choisit un $\delta > 0$ tel que $\bar{B}(a, r + 2\delta) \subset \Omega$, et

$$\left(\frac{r}{r+\delta}\right)^m \left(M + \frac{\epsilon}{2}\right) < M + \epsilon.$$

Alors, le lemme de Fatou nous dit que

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_B(u_n; a, r) \leqslant \mu_B(\limsup_{n\to+\infty} u_n; a, r) \leqslant M.$$

Alors, on choisit n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $\mu_B(u_n; a, r) \leqslant M + \frac{\epsilon}{2}$. Enfin, pour tout $x \in \bar{B}(a, \delta)$, on a :

$$u_n(x) \leqslant \mu_B(u_n; a, r+\delta) \leqslant \frac{r^m}{(r+\delta)^m}\mu_B(u_n; a, r)$$

car u_n est négative, et $r^m \mu(B(a, r))^{-1}$ est une constante indépendante de r.
En regroupant tout ce qui a été dit, on conclut très facilement. □

2. Fonctions psh

Il y a de nombreuses manières d'introduire les fonctions psh, car, comme toutes les notions fondamentales, la notion de plurisousharmonicité peut s'aborder de différents points de vue. L'approche la plus naturelle consiste peut-être à dire, en suivant [Lel68] dans son article fondateur, qu'une fonction psh (sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$) est la version complexe d'une fonction convexe (sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$). Ou encore que la plurisousharmonicité est la version géométrique, au sens complexe, de la notion de sous-harmonicité.
Soyons maintenant un peu plus précis. Une fonction f, disons $\mathscr{C}^2$ si l'on veut éviter le langage des distributions pour le moment, sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ est convexe si, par définition, sa hessienne (réelle) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j}$ est positive (on dit parfois semi-positive pour éviter les confusions avec l'anglais) en tout point a.

Alors une fonction u de classe $\mathscr{C}^2$ sera dite psh si sa hessienne complexe $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(a)\right)_{i,j}$ est semi-positive pour tout a.
Pour avoir une définition général, il nous faut cependant le langage -très pratique- des distributions :

Définition 2.1. — Soit Ω un ouvert (connexe) de $\mathbb{C}^n$, alors une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ est dite plurisousharmonique (psh) si elle est identiquement égale à $-\infty$, ou si elle est semi-continue supérieurement (scs), localement intégrable, et si pour tout vecteur $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et tout point $a \in \Omega$, la distribution

$$Hu(\lambda) := \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}(a) \lambda_i \bar{\lambda}_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

est une mesure positive.

Remarque 3.
Par commodité d'écriture, on a défini la notion de fonction psh sur un ouvert connexe. Bien sûr, cette notion s'étend à un ouvert quelconque en demandant d'être psh sur toute composante connexe. On note alors $\mathrm{Psh}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions psh sur Ω.

L'avantage de définir ainsi les fonctions psh est qu'on voit tout de suite qu'il s'agit d'une notion géométrique. En effet, si f est une fonction holomorphe entre deux ouverts $U \subset \mathbb{C}^n$ et $V \subset \mathbb{C}^m$ alors si u est de classe $\mathscr{C}^2$ et psh sur V, $f^* u = u \circ f$ est psh sur U. Pour le voir, un simple calcul utilisant le fait qu'en une variable, $\frac{\partial}{\partial z}(u \circ f)(a) = \frac{\partial u}{\partial z}(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(a)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u \circ f)(a) = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(a) \cdot \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(a)}$ montre que $H(u \circ f)_a(\lambda) = Hu_{f(a)}(f'(a) \cdot \lambda)$, où $f'(a) = (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a))$ est la jacobienne de f en a.
On pourrait aussi utiliser le fait que f^* préserve le bidegré, donc commute à ∂ et $\bar{\partial}$, ce qui donne la même formule.
Ainsi, en choisissant pour f un biholomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{C}^n$, on voit qu'une fonction u de classe $\mathscr{C}^2$ sur une variété complexe, est psh lue sur $U_i \cap U_j$ via la carte φ_i est psh si et seulement si elle l'est via la carte φ_j. Ainsi, la notion de fonction psh sur une variété complexe a bien un sens (il reste une étape pour les fonctions psh générales, qui est facile à franchir une fois le théorème 2.4 connu).

Le lien entre convexité holomorphe (ou plurisousharmonicité) et convexité réelle dépasse la seule ressemblance dans les définitions. Tout d'abord, nous verrons dans la partie sur la pseudoconvexité qu'une fonction convexe sur un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$, vue sur $\mathbb{C}^n$, est toujours psh. Inversement, on dispose du résultat suivant :

Proposition 2.2. — *Soit $u(z)$ une fonction psh sur $\mathbb{C}^n$ que ne dépend que de $x = \mathrm{Re}(z)$. Alors via l'injection naturelle $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$, $u_{|\mathbb{R}^n} : x \mapsto u(x)$ est une fonction convexe.*

Démonstration. — L'assertion est claire dans le cas où la fonction u est de classe $\mathscr{C}^2$. En effet,

$$\begin{aligned} 4\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}\right) + i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_j}\right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \end{aligned}$$

et ainsi les hessiennes complexes et réelles coïncident à un facteur 4 près.
Quant au cas général, il se déduit du cas précédent par convolution par un noyau régularisant radial ρ_ϵ, car alors $u \star \rho_\epsilon(z)$ ne dépend encore que de la partie réelle de z, et une limite (décroissante) de fonctions convexes est convexe. □

Munis de la définition 2.1, on peut maintenant se demander quel le lien entre plurisousharmonicité et sous-harmonicité annoncé dans le préambule de ce paragraphe. Tout d'abord, le laplacien étant (à un facteur 4 près) la trace de la hessienne complexe, il est clair qu'une fonction psh (non identiquement nulle sur chaque composante connexe de l'ouvert de définition) est sous-harmonique presque partout, mais le passage à « partout »n'est pas si évident (penser à la fonction indicatrice de $\{0\}$ qui est localement intégrable, scs, à laplacien positif, mais bien sûr pas sous-harmonique). Mais en fait, le résultat suivant règle notre problème :

Théorème 2.3. — *Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est plurisousharmonique si et seulement si :*

(i) u est semi-continue supérieurement ;

(ii) pour toute droite (affine) complexe $L \subset \mathbb{C}^n$, $u_{|\Omega\cap L}$ est sous-harmonique sur $\Omega \cap L$.

Démonstration. — On donne ici seulement une esquisse de la preuve.
Tout d'abord, si u est $\mathscr{C}^2$, l'équivalence est claire car si $w \in \mathbb{C}, a \in \Omega, \lambda \in \mathbb{C}^n$, on a la formule :

$$\frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} u(a + w\lambda) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} u(a + w\lambda)\lambda_i \bar{\lambda}_j,$$

et on sait qu'une fonction u de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est sous-harmonique si et seulement si son laplacien est positif en tout point.
Le cas général s'en déduit sans grandes difficultés une fois connue la propriété d'approximation donnée ci-dessous. □

Théorème 2.4. — *Soit $u \in \mathrm{Psh}(\Omega)$ non identiquement égale à $-\infty$ sur aucune composante connexe de Ω. Si (ρ_ϵ) est une famille de noyaux radiaux régularisants, alors $u \star \rho_\epsilon$ est $\mathscr{C}^\infty$ et psh sur $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega;\, d(x, {}^c\Omega) > \epsilon\}$, et tend en décroissant vers u quand $\epsilon \to 0$.*

> ***Remarque 4.***
> Avec cette caractérisation là, il devient très facile de voir que si $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille de fonctions psh telle que $u := \sup_A u_\alpha$ est scs, alors u est psh. Dans le cas général, on peut définir une régularisée u^* de u telle que u^* est psh (ou encore scs), et $u^* = u$ presque partout.

Pour clore la question du lien entre fonctions sh et fonctions psh, on donne le résultat intéressant ci-dessous :

Théorème 2.5. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert connexe, alors une fonction u est psh sur Ω si et seulement si elle est sous-harmonique, et si $u \circ A$ le demeure au voisinage de 0 pour toute transformation complexe affine telle que $A(0) \in \Omega$.*

Démonstration. — Un sens est évident par ce qui a déjà été dit. L'autre est plus subtil. Quitte à composer par une translation, on peut supposer que $A(0) = 0 \in \Omega$, la notion de plurisousharmonicité pouvant se vérifier localement.
On se donne alors $\lambda \in \mathbb{C}^n$ non nul, et on va utiliser la matrice, pour $\sigma \in \mathbb{C}^*$,

$$A_\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \sigma a_{21} & \cdots & \sigma a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma a_{n1} & \cdots & \sigma a_{nn} \end{pmatrix}$$

avec les a_{ij} choisis de telle sorte que la matrice soit inversible.
Alors, en prenant le laplacien complexe :

$$\begin{aligned} \Delta(u \circ A_\sigma)_0 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 (u \circ A_\sigma)}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}(0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (A_\sigma)_{ik} \overline{(A_\sigma)_{jk}} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(0) \\ &= Hu_0(\lambda) + |\sigma|^2 \sum_{\ell=2}^{n} Hu_0((a_{\ell j})_j) \end{aligned}$$

On sait que cette dernière quantité est toujours positive, et on obtient alors le résultat recherché en faisant tendre σ vers 0. □

Exemple 2.6. — On sait qu'en dimension complexe égale à 1, les notions de sous-harmonicité et de plurisousharmonicité coïncident. En revanche, dès la dimension 2, l'exemple suivant très simple décrit bien le résultat précédent : on prend $f(z_1, z_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2$, qui est évidemment sous-harmonique sur $\mathbb{C}^2$. En revanche, tout changement de coordonnées linéaire élémentaire $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda z_1, \mu z_2)$ transforme f en $(z_1, z_2) \mapsto |\lambda|^2|z_1|^2 - |\mu|^2|z_2|^2$ qui n'est plus sous-harmonique dès que $|\lambda| < |\mu|$.

Voici maintenant une propriété fondamentale bien qu'élémentaire (la preuve se voit en écrivant une fonction convexe comme supremum de fonctions affines) pour construire des fonctions psh à partir des exemples simples du type $||z||^2, \log ||z||, |f|^2$ pour f holomorphe ...

Proposition 2.7. — *Soient $u_1, \ldots, u_p \in \mathrm{Psh}(\Omega)$, et $\chi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, croissante en chacune de ses variables. Alors $\chi(u_1, \ldots, u_p)$ est psh.*

Exemple 2.8. — Ainsi, $u_1 + \cdots + u_p$, $\max(u_1, \ldots, u_p)$, $\log(e^{u_1} + \cdots + e^{u_p})$ sont des fonctions psh dès que les u_i le sont aussi.
Alors, en prenant $u_i = \alpha_i \log |f_i|$ avec $\alpha_i > 0$ et f_i une fonction holomorphe (sur une variété complexe), alors on trouve que $\log(|f_1|^{\alpha_1} + \cdots + |f_p|^{\alpha_p})$ est psh.

Le dernier exemple est fondamental, et on va même donner un nom à de telles fonctions psh, qui forment le cadre analytique le plus naturel pour généraliser certaines notions algébriques (nous y reviendrons en détail, par exemple dans la partie sur les idéaux adjoints) :

Définition 2.9. — Soit X une variété complexe, on dit qu'une fonction $u \in \mathrm{Psh}(X)$ a des singularités analytiques si u peut s'écrire localement sous la forme :

$$u = \alpha \log(|f_1| + \cdots + |f_p|) + v,$$

avec des fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p$, $\alpha \geqslant 0$ un réel, et v une fonction bornée.

Pour illustrer le bon comportement local des fonctions psh, on donne le résultat suivant, issu de [**Dem**] pour la première partie, et de [**Hö94**] (thm 3.2.12) pour la deuxième, et qui nous servira par la suite :

Théorème 2.10. — *On dispose de deux types de compacité :*

(i) Le cône convexe $\mathrm{Psh}(\Omega) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *est fermé dans* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *et a la propriété que tout sous-ensemble borné est relativement compact ;*

(ii) Soit (u_n) *une suite de fonctions psh localement uniformément majorées sur* Ω*, alors soit* (u_n) *converge localement uniformément vers* $-\infty$*, soit il existe une sous-suite convergeant vers une fonction psh* u *dans tous les* $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$*,* $1 \leqslant p < +\infty$*.*

Le résultat suivant, démontré dans [**Hö94**] (thm 3.2.13), et déjà presque intégralement valable pour les fonctions sous-harmoniques, montre à quel point le cadre des fonctions psh est très agréable du point de vue topologique :

Théorème 2.11. — *Soit* (u_n) *une suite de fonctions psh sur un ouvert connexe* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$*, avec* $u_n \not\equiv -\infty$*. On suppose que* (u_n) *converge vers une fonction psh* u *au sens des distributions. Alors la suite* (u_n) *est localement majorée sur tout compact de* Ω*, et* $u_n \to u$ *dans* $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[$*.*
De plus, pour tout compact $K \subset \Omega$*, et toute fonction* $f \in \mathcal{C}^0(K)$*, on a :*

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \sup_K (u_n - f) \leqslant \sup_K (u - f).$$

Ainsi, il existe *une* topologie naturelle sur les fonctions psh sur une variété complexe ; c'est celle que nous choisirons dans toute la suite.

3. Fonctions quasi-psh

Même si la notion de fonction psh a un sens global, on s'intéresse le plus souvent au comportement local de telles fonctions. Cependant, sur une variété (kählerienne) compacte, le principe du maximum nous dit qu'il n'y a pas de fonction psh non constante.
Un moyen simple de contourner ce problème est de rendre la notion locale :

Définition 3.1. — Soit (X, ω) une variété kählerienne compacte. On dit qu'une fonction u sur X est quasi-psh si elle s'écrit localement comme somme d'une fonction psh et d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On note $\mathrm{QPsh}(X)$ (resp. $\mathrm{QPsh}(X, \gamma)$ pour γ une fonction continue positive sur X) l'ensemble des fonctions quasi-psh sur X (resp. γ-psh, *ie* $dd^c u \geqslant -\gamma\omega$). On munit alors $\mathrm{QPsh}(X, \gamma)$ de *la* topologie induite localement par les fonctions psh.

Avec cette définition, on n'a donc pas forcément $dd^c u = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}u$ positive, mais on aura toujours $dd^c u \geqslant -C\omega$ pour C une certaine constante.

On introduit les classes suivantes, toujours pour X kählerienne compacte :

$$\mathscr{P}_1 = \{u \in \mathrm{QPsh(X)};\ dd^c u \geqslant -\omega \text{ et } \max u = 0\} \subset \mathrm{QPsh}(X,1);$$

$$\mathscr{P}_2 = \{u \in \mathrm{QPsh(X)};\ dd^c u \geqslant -\omega \text{ et } \int_X u\,\omega^n = 0\} \subset \mathrm{QPsh}(X,1).$$

et on s'intéresse à leur compacité.

Tout d'abord, un peu de réflexion nous dit que la partie (ii) du théorème 2.10 se généralise bien aux fonctions quasi-psh sur une variété compacte X, vérifiant $dd^c u_n \geqslant -C\omega$. En effet, sur des ouverts de cartes U_i (ou plutôt sur un ouvert relativement compact V_i de U_i), on peut trouver une fonction psh φ_i telle que $dd^c\varphi_i \geqslant C\omega$ sur V_i, et donc $(u_n+\varphi)_n$ sera bien une suite uniformément majorée de fonctions psh. On a donc convergence dans L^p sur chaque V_i vers une fonction u_i quasi-psh avec $dd^c u_i \geqslant -C\omega$, et en choisissant un recouvrement U_i tel que V_i recouvre encore X, on recolle les u_i (c'est automatique en fait, car (u_n) converge dans L^p sur un nombre *fini* de compacts recouvrant X) en une fonction u qui est la fonction cherchée.
Une fois cette remarque effectuée, on peut passer à la propriété de compacité fondamentale suivante :

Théorème 3.2. — *Soit X une variété kählerienne compacte. Alors les espaces $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont compacts.*

Démonstration. — Soit $(u_k) \subset \mathscr{P}_1$. La suite est uniformément majorée, et on peut tout de suite exclure le cas où (u_k) tend uniformément vers $-\infty$. Donc quitte à extraire, on peut supposer que (u_k) converge dans L^p vers une fonction quasi-psh u vérifiant $dd^c u \geqslant -\omega$. Il faut montrer que $\max u = 0$. Si ce n'était pas le cas, alors il existerait $c > 0$ tel que $u < -c$. Le lemme de Hartogs (appliqué à un nombre fini d'ouverts de cartes par exemple) nous montre alors que pour n grand, on a encore $u_k < -c$, ce qui est absurde car $u_k \in \mathscr{P}_1$.
On considère maintenant le cas où $(u_k) \subset \mathscr{P}_2$. On pose $m_k = \max u_k$, et $v_k = u_k - m_k$. Alors $(v_k) \subset \mathscr{P}_1$, et quitte à extraire, on peut supposer que (v_k) converge dans L^p vers une fonction $v \in \mathscr{P}_1$. Mais par définition de P_2, on a :

$$m_k = -\int_X v_k\omega^n \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -\int_X v\omega^n.$$

On pose alors $m := -\int_X v\omega^n$, et $u = v + m$. On a bien $u \in \mathscr{P}_2$, et u_k converge dans L^p vers u, ce qui conclut. $\square$

La preuve de ce théorème a montré que $\max u_k$ convergeait vers une quantité finie, donc en particulier, on a directement le résultat suivant, que l'on utilisera dans la dernière partie de ce mémoire au moment d'établir une condition de fermeture, garantissant l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein :

Corollaire 3.3. — *Soit X une variété kählerienne compacte, alors*

$$\sup_{u\in\mathscr{P}_2} \max_X u < +\infty.$$

4. Pseudoconvexité

Dans cette partie, nous allons parler brièvement des domaines de $\mathbb{C}^n$ et des variétés complexes qui vont nous intéresser dans la suite du mémoire. Nous n'aborderons pas les notions de domaine d'holomorphie, d'holomorphe convexité, de variété de Stein, mais seulement celle de pseudoconvexité (et aussi la faible pseudoconvexité), mais il est bon de garder en tête que toutes ces notions sont équivalentes (pour les ouverts de $\mathbb{C}^n$), et qu'en fait, regarder les ouverts pseudoconvexes (ou les variétés pseudoconvexe) est un choix naturel.

Rappelons la définition suivante :

Définition 4.1. — Une fonction $\psi : X \mapsto [-\infty, +\infty[$ sur un espace topologique X est une fonction d'exhaustion si tous les sous-niveaux $X_c = \{z \in X; \psi(z) < c\}, c \in \mathbb{R}$ sont relativement compacts. De manière équivalente, ψ est une exhaustion si et seulement si ψ tend vers $+\infty$ suivant le filtre des complémentaires des parties compactes.

Définition 4.2. — Soit X une variété complexe de dimension n, alors on dit que X est :

- faiblement pseudoconvexe s'il existe une fonction d'exhaustion lisse psh $\psi \in \mathrm{Psh}(X) \cap \mathscr{C}^\infty(X)$;
- fortement pseudoconvexe s'il existe une fonction d'exhaustion lisse strictement psh $\psi \in \mathrm{Psh}(X) \cap \mathscr{C}^\infty(X)$; ie $H\psi$ est définie positive en tout point.

Exemple 4.3. — La boule unité ouverte $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ est (fortement) pseudoconvexe.
En effet, considérons la fonction ϕ définie sur $\mathcal{B}$ par $\phi(z) = -\log(1 - ||z||^2)$, on va montrer que ϕ est plurisousharmonique, ce qui conclura. Pour cela, on calcule :

$$(\partial_i \bar{\partial}_i \phi)(z) = -\partial_i \bar{\partial}_i \log(1 - z\bar{z}) = \partial_i \left(\frac{z_i}{1 - z\bar{z}} d\bar{z}_i \right) = \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{(1 - ||z||^2)^2}$$

$$(\partial_i \bar{\partial}_j \phi)(z) = \partial_i \left(\frac{z_j}{1 - z\bar{z}} d\bar{z}_j \right) = \frac{\bar{z}_i z_j dz_i \wedge d\bar{z}_j}{(1 - ||z||^2)^2} \quad (i \neq j)$$

Ainsi, la forme hermitienne $\Phi(z)$ associée à $\partial\bar{\partial}\varphi$ en $z = (z_1, \ldots, z_n)$ est bien définie positive car si $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\Phi(z)(w) = \sum_{i=1}^n \overline{w_i} w_i + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \overline{w_i z_i} z_j w_j = ||w||^2 + \underbrace{\left| \sum_i z_i w_i \right|^2 - \sum_{i=1}^n |z_i w_i|^2}_{\geqslant 0}.$$

On aurait aussi pu dire que $[0, 1[\ni x \mapsto -\log(1 - x)$ est convexe croissante, et $z \mapsto ||z||^2$ psh.

En fait, il se trouve que pour un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, le choix de la fonction $\varphi_\Omega : z \mapsto -\log d(z, {}^c\Omega)$ est canonique. En effet, un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est faiblement pseudoconvexe si et seulement si φ_Ω est psh sur Ω, et le cas échéant, Ω est automatiquement fortement pseudoconvexe grâce au théorème d'approximation de Richberg. Ces conditions sont également équivalentes à l'existence d'une fonction d'exhaustion psh (a priori non lisse). On renvoie à [**Dem**] pour tous ces résultats.

Comme son nom l'indique, la notion de pseudoconvexité pour les ouverts de $\mathbb{C}^n$ est l'analogue complexe (la généralisation en fait) de la notion géométrique de convexité, qu'elle rend holomorphiquement stable.

Comment le voir ? Plaçons nous du point de vue fonctionnel en remarquant que toute fonction convexe sur un ouvert de Ω de $\mathbb{C}^n$ est psh. Donnons deux méthodes pour comprendre ce résultat.

Tout d'abord, on peut dire qu'une fonction est psh si restreinte à toute droite complexe, elle est sous-harmonique. Or, en dimension complexe égale à un, la convexité implique la sous-harmonicité car $4\partial_z\bar{\partial}_z f = \Delta_z f = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_z f)$. Enfin, une fonction convexe sur un ouvert est continue donc scs.

De manière plus indirecte, on peut dire aussi qu'une fonction convexe f est en tout point le supremum des fonctions affines globalement inférieures à f. En remarquant que toute fonction affine réelle sur $\mathbb{R}^{2n}$ est la partie réelle d'une fonction affine complexe définie sur $\mathbb{C}^n$, on obtient que f est le supremum de fonctions pluriharmoniques. Elle vérifie donc la condition de sous-harmonicité sur chaque droite, et étant continue, elle est psh.

Il reste maintenant à faire le lien avec les ouverts pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$. Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$, alors il possède une fonction de jauge $J_\Omega : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ convexe et vérifiant $\Omega = J_\Omega^{-1}([0,1[)$ et $\partial\Omega = J_\Omega^{-1}(1)$. Comme $x \mapsto -\log(1-x)$ est convexe croissante sur $[0,1[$, la fonction $-\log(1-J_\Omega)$ est une fonction d'exhaustion de Ω, ce qui conclut par les remarques suivant l'exemple 4.3.

Pour finir ces remarques, on peut également noter que dès lors que l'on sait qu'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ est pseudoconvexe si et seulement si c'est un domaine d'holomorphie (c'est-à-dire admettant une fonction holomorphe n'admettant pas de prolongement à un ouvert fixé rencontrant $\partial\Omega$), il devient évident qu'un ouvert convexe est pseudoconvexe (considérer un hyperplan d'appui pour un point de l'intersection de l'ouvert avec $\partial\Omega$).

PARTIE II
LA THÉORIE L^2

Pourquoi la théorie L^2 ? C'est une, voire la question naturelle à se poser avant de commencer à lire cette partie. Et c'est une question assez profonde en fin de compte. En effet, de manière général, il est plus simple, surtout si l'on veut comprendre précisément des singularités, de se placer dans le cadre L^∞, mais en fait, ce cadre n'est pas adapté à la géométrie complexe, et donne lieu à des objets un peu bannis comme des faisceaux analytiques *non* cohérents. Ainsi, il va falloir travailler avec d'autres espaces, et évidemment, le plus abordable est maintenant l'espace L^2.
Pour résumer, la théorie L^2 s'intéresse aux fonctions holomorphes f qui sont L^2 par rapport à la mesure $e^{-2\varphi}dV$, dans des coordonnées disons (on peut aussi se demander pourquoi on choisit un tel poids, pour cela, un bon moyen de se convaincre consiste à regarder les fonctions du type $\log|f|$ avec f holomorphe). On utilise alors les méthodes hilbertiennes standards, qui s'accordent bien avec les résultats de théorie de Hodge L^2 également, et finalement, on peut établir des théorèmes très profonds, comme la résolution de l'opérateur $\bar\partial_E$ pour certain fibré en droites à courant de courbure strictement positif (c'est l'équivalent global de la notion de fonction -strictement- psh) ou encore le célèbre théorème d'Ohsawa-Takegoshi.

5. Méthodes L^2 pour la résolution du $\bar\partial$

Un problème fondamental en géométrie complexe est celui de la résolution de l'équation $\bar\partial f = g$ où g est donnée et vérifie bien sûr $\bar\partial g = 0$. Deux principales questions se dégagent de ce problème : tout d'abord celle de l'existence (existe-t-il une solution ? quelle régularité espérer...) et ensuite celle du contrôle (au sens d'une norme intégrale) de la solution f par la donnée g.
Pour être résolu correctement, il faut fixer un grand nombre de paramètres : propriétés de la variété de départ (ouvert pseudoconvexe, variété kählerienne complète...), de la nature de f et g (fonctions, formes différentielles, sections d'un fibré holomorphe), de la régularité de ces dernières, ou encore des propriétés des fibrés en question (positivité/semi-positivité de la courbure...), et enfin le type précis du contrôle que l'on cherche.
Ainsi le nombre de résultats qui gravitent autour de ce problème est considérable, mais nous ne voulons ici donner qu'un bref aperçu des résultats les plus significatifs, et qui nous serviront par la suite. Nous renvoyons au texte de [**Ber95**] pour un aperçu progressif assez vaste de la question.

Nous allons ici suivre la présentation de [**DBIP96**] en donnant tout de suite le cas très général d'une variété kählerienne complète muni d'un fibré holomorphe hermitien. Pour les définitions usuelles que nous ne redonnerons pas ainsi que pour tous les résultats que nous ne démontrons pas, nous renvoyons donc au livre cité ci-dessus. On commence par donner un résultat d'approximation :

Proposition 5.1. — *Soit (X, g) une variété complète, et E un fibré vectoriel hermitien sur X muni d'une connexion hermitienne D. Alors D^* coïncide avec l'adjoint hilbertien de D, et l'espace $\mathcal{D}(X, \Lambda^\bullet T_X^* E)$ des sections $\mathscr{C}^\infty$ à support compact est dense dans* $\operatorname{Dom} D, \operatorname{Dom} D^*$ *et* $\operatorname{Dom} D \cap$

$\operatorname{Dom} D^*$ *respectivement pour les normes des graphes*

$$u \mapsto ||u|| + ||Du||, \quad u \mapsto ||u|| + ||D^*u||, \quad u \mapsto ||u|| + ||Du|| + ||D^*u||.$$

Rappelons que l'on note encore D l'opérateur non borné entre les espaces de Hilbert $L^2(X, \Lambda^p T_X^* \otimes E) \to L^2(X, \Lambda^{p+1} T_X^* \otimes E)$, et que par définition, $u \in \operatorname{Dom} D$ si et seulement si Du, calculé au sens distributions, est encore dans L^2.
On peut aussi étendre le théorème de Hodge donnant une décomposition de l'espace $L^2(X, \Lambda^\bullet T_X^* \otimes E)$:

Théorème 5.2. — *Avec les notations précédentes et si $D^2 = 0$, alors il y a une décomposition orthogonale :*

$$\begin{aligned} L^2(X, \Lambda^\bullet T_X^* \otimes E) &= \mathscr{H}^\bullet_{L^2}(X, E) \oplus \overline{\operatorname{Im} D} \oplus \overline{\operatorname{Im} D^*} \\ \operatorname{Ker} D &= \mathscr{H}^\bullet_{L^2}(X, E) \oplus \overline{\operatorname{Im} D} \end{aligned}$$

où $\mathscr{H}^\bullet_{L^2}(X, E) = \{u \in L^2(X, \Lambda^\bullet T_X^* \otimes E);\ \Delta u = 0\}$ *est l'espace des formes harmoniques L^2 sur X.*

Avant de passer à la résolution du $\bar\partial$, il nous faut rappeler l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano : si (X, ω) est une variété kählerienne, les laplaciens complexes Δ_{∂_E} et $\Delta_{\bar\partial_E}$ agissant sur les formes à valeurs dans E satisfont l'identité

$$\Delta_{\bar\partial_E} = \Delta_{\partial_E} + [i\Theta(E), \Lambda]$$

où $\Theta(E)$ désigne la courbure de Chern du fibré hermitien E, et $\Lambda = L^*$ est l'adjoint formel de l'opérateur de Lefschetz $L : \alpha \mapsto \omega \wedge \alpha$ agissant sur les formes différentielles.
En particulier, si X est compacte, et $u \in \mathscr{C}^\infty(X, \Lambda^{p,q} T_X^* \otimes E)$, on a l'inégalité a priori :

$$||\bar\partial_E u||^2 + ||\bar\partial_E^* u||^2 \geqslant \int_X \langle [i\Theta(E), \Lambda] u, u\rangle dV_\omega. \tag{5.1}$$

Voilà maintenant le résultat qui est la clef de voûte de la théorie L^2, en particulier pour les théorèmes d'annulation de cohomologie.

Théorème 5.3. — *Soit (X, ω) une variété kählerienne complète. Soit E un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang r sur X tel que l'opérateur de courbure $A = A^{p,q}_{E,\omega} = [i\Theta(E), \Lambda_\omega]$ soit semi-positif sur toutes les fibres de $\Lambda^{p,q} T_X^* \otimes E, q \geqslant 1$. Soit $g \in L^2(X, \Lambda^{p,q} T_X^* \otimes E)$ une forme telle que*

$$\bar\partial_E g = 0 \text{ et } \quad \int_X \langle A^{-1} g, g\rangle dV_\omega < +\infty$$

(aux points où A n'est pas défini positif, on suppose qu'un antécédent $A^{-1}g$ existe presque partout, et on choisit l'antécédent de norme minimale, orthogonal à Ker$A$*). Alors il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{p,q-1} T_X^* \otimes E)$ telle que*

$$\bar\partial_E f = g \quad \text{et} \quad \int_X |f|^2 dV_\omega \leqslant \int_X \langle A^{-1} g, g\rangle dV_\omega.$$

Démonstration. — On va commencer par étendre l'inégalité a priori (5.1) aux formes $u \in L^2(X, \Lambda^{p,q} T_X^* \otimes E)$ telles que $\bar\partial_E u, \bar\partial_E^* u \in L^2$. Pour ce faire, comme $\bar\partial_E = D^{0,1}$ si D est la connexion de Chern de E, on peut utiliser le résultat d'approximation 5.1 pour écrire u comme limite (au sens L^2) de formes u_n qui soient $\mathscr{C}^\infty$ à support compact, et telles qu'on ait également convergence dans L^2 de $\bar\partial_E u_n$

(resp. $\bar\partial_E^* u_n$) vers $\bar\partial_E u$ (resp. $\bar\partial_E^* u$).
Le convexe $\operatorname{Ker}\bar\partial_E$ est faiblement fermé, donc il est fortement fermé. On a donc une décomposition orthogonale de l'espace de Hilbert ambiant :

$$L^2(X,\Lambda^{p,q}T_X^*\otimes E)=\operatorname{Ker}\bar\partial_E\oplus(\operatorname{Ker}\bar\partial_E)^\perp.$$

La clé est maintenant d'obtenir une estimée de $|\langle g,v\rangle|$ pour $v\in\mathcal{D}^{p,q}(X,E)$.
Ainsi, on utilise la décomposition précédente : $v=v_1+v_2$. Comme $(\operatorname{Ker}\bar\partial_E)^\perp=\overline{\operatorname{Im}\bar\partial_E^*}\subset\operatorname{Ker}\bar\partial_E^*$ car $\bar\partial_E^*$ est faiblement continu et de carré nul. On a donc $\bar\partial_E^* v_2=0$, et comme $g,v_1\in\operatorname{Ker}\bar\partial_E$, on a $\langle g,v\rangle=\langle g,v_1\rangle$.
D'autre part, A est symétrique positif, donc en prenant B une racine, on peut écrire presque partout

$$|\langle g,v_1\rangle|^2=|\langle B^{-1}g,Bv_1\rangle|^2\leqslant||B^{-1}g||^2||Bv_1||^2=|\langle A^{-1}g,g\rangle|^2|\langle Av_1,v_1\rangle|^2.$$

Ensuite, on applique l'inégalité a priori (5.1) à $u=v_1$, ce qui donne

$$\langle Av_1,v_1\rangle\leqslant||\bar\partial_E^* v_1||^2=||\bar\partial_E^* v||^2.$$

En combinant les deux inégalités obtenues, on trouve finalement

$$|\langle g,v\rangle|^2\leqslant\left(\int_X\langle A^{-1}g,g\rangle dV_\omega\right)||\bar\partial_E^* v||^2$$

quelle que soit $v\in\mathcal{D}^{p,q}(X,E)$.
Ceci montre que la forme linéaire Ψ définie sur l'image $\bar\partial_E^*(\mathcal{D}^{p,q}(X,E))\subset L^2(X,\Lambda^{p,q-1}T_X^*\otimes E)$ par $w=\bar\partial_E^* v\mapsto\langle v,g\rangle$ (elle est bien définie car par l'inégalité précédente, si u est lisse à support compact, $\bar\partial_E^* u=0\Rightarrow\langle u,g\rangle=0$) est continue pour la norme L^2, de norme $\leqslant C$, où

$$C=\left(\int_X\langle A^{-1}g,g\rangle dV_\omega\right)^{1/2}.$$

Le théorème de Hahn-Banach combiné au théorème de Riesz montre qu'il existe $f\in L^2(X,\Lambda^{p,q-1}T_X^*\otimes E)$, $||f||\leqslant C$, telle que pour tout $u\in L^2(X,\Lambda^{p,q-1}T_X^*\otimes E)$, on ait $\Psi(u)=\langle u,f\rangle$. En particulier, pour tout $v\in\mathcal{D}^{p,q}(X,E)$, on a l'égalité $\langle\bar\partial_E^* u,f\rangle=\langle u,g\rangle$, et donc au sens des distributions, $\bar\partial_E f=g$. Quant à l'inégalité recherchée sur la norme de f, elle est équivalente à $||f||\leqslant C$. □

Il reste encore quelques étapes importantes à franchir (passage à des variété faiblement pseudo-convexes non nécessairement complètes, cas des métriques singulières sur E, ...) avant de passer à une résolution du $\bar\partial$ dans un cadre plus naturel au sens de la géométrie complexe. C'est l'objets des quelques résultats de géométrie riemannienne suivants.
Le premier énoncé, qu'on peut considérer comme le théorème de Hopf-Rinow, est un résultat standard reliant la propriété, pour une variété riemannienne, d'être complète, à celle de posséder des fonctions d'exhaustions particulières (on renvoie à [DBIP96] pour la preuve).

Proposition 5.4. — *Soit (X,g) une variété riemannienne. Alors (X,g) est complète si et seulement s'il existe une fonction d'exhaustion $\psi\in\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ vérifiant $|d\psi|_g\leqslant 1$.*

Afin de passer au dernier résultat, on donne un lemme élémentaire d'algèbre linéaire, qui sera utile :

Lemme 5.5. — *Considérons sur un espace vectoriel complexe V de dimension n une $(1,1)$-forme réelle positive ω, et α une $(1,0)$-forme. Alors on a égalité :*

$$\alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = |\alpha|^2_\omega \, \frac{\omega^n}{n!}.$$

Démonstration. — Le résultat est clair si $\alpha = 0$. Sinon, on peut choisir α comme premier terme d'une base orthogonale $(\alpha, \beta_2, \dots, \beta_n)$ pour ω. En d'autres termes, il existe $\lambda > 0$ tels que :

$$\omega = \lambda\, \alpha \wedge \bar{\alpha} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \wedge \bar{\beta}_i,$$

où bien sûr $\lambda = |\alpha|^{-2}_\omega$.
Mais alors, $\alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \omega^{n-1} = (n-1)!\, \alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge (\bigwedge_{i=2}^n \beta_i \wedge \bar{\beta}_i)$ alors que $\omega^n = n!\, \lambda \alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge (\bigwedge_{i=2}^n \beta_i \wedge \bar{\beta}_i)$ et la conclusion s'ensuit. □

Muni de ces résultats, on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 5.6. — *Toute variété kählerienne (X, ω) faiblement pseudoconvexe possède une métrique kählerienne complète $\widehat{\omega}$.*

Démonstration. — On prend ψ une fonction d'exhaustion psh lisse, et on se donne une fonction convexe croissante $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors, on considère la $(1,1)$-forme fermée, qui est bien kählerienne car $\chi \circ \psi$ est psh :

$$\omega_\chi = \omega + i\partial\bar{\partial}(\chi \circ \psi) = \omega + \chi'(\psi) i\partial\bar{\partial}\psi + \chi''(\psi)\, i\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi.$$

En effet :

$$\partial\bar{\partial}(\chi \circ \psi) = \partial \left(\sum_j \chi'(\psi)\, \bar{\partial}_j \psi\, d\bar{z}_j \right) = \sum_{i,j} \chi''(\psi) \partial_i \psi\, \partial_{\bar{j}} \psi\, dz_i \wedge d\bar{z}_j + \chi'(\psi)\, \partial^2_{i\bar{j}} \psi\, dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

Si ρ est une primitive de $(\chi'')^{1/2}$, $\omega_\chi \geqslant i\partial(\rho \circ \psi) \wedge \bar{\partial}(\rho \circ \psi)$, et en prenant $(n-1)$ fois le produit extérieur avec la forme positive ω_χ, on trouve :

$$\frac{\omega_\chi^n}{n!} \geqslant \frac{1}{n} i\partial(\rho \circ \psi) \wedge \bar{\partial}(\rho \circ \psi) \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{n} |\partial(\rho \circ \psi)|^2_{\omega_\chi} \frac{\omega_\chi^n}{n!}$$

grâce le lemme précédent, et donc $|d(\rho \circ \psi)|^2_{\omega_\chi} = 2|\partial(\rho \circ \psi)|^2_{\omega_\chi} \leqslant 2n$.
Quitte à changer χ en $\frac{1}{4n^2}\chi$, on peut donc supposer qu'on a l'inégalité $|d(\rho \circ \psi)|_{\omega_\chi} \leqslant 1$. Par la proposition précédente, il suffit de montrer que $\rho \circ \psi$ est exhaustive, ou encore que $\lim_{+\infty} \rho = +\infty$. On prend alors $\chi(t) = t^2$ (quitte à ajouter une constante à ψ, on peut la supposer positive), et le résultat est démontré. □

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour donner une version plus maniable de la résolution du $\bar{\partial}$, modulo le passage aux métriques singulières, qui elle, peut se faire par les techniques usuelles d'approximation. Voilà donc le résultat final, qui constitue le coeur du théorème d'annulation de Nadel :

Théorème 5.7. — *Soit* (X,ω) *une variété kählerienne de dimension* n*, supposée faiblement pseudoconvexe. On considère* E *un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne singulière dont le poids local est noté* $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}$*. On suppose qu'au sens des courants, on a* $i\Theta(E) = 2i\partial\bar{\partial}\varphi \geqslant \epsilon\omega$ *pour un certain réel* $\epsilon > 0$*. Alors pour toute forme* $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q}T^*_X \otimes E)$ *vérifiant* $\bar{\partial}_E g = 0$*, il existe* $f \in L^2(X, \Lambda^{n,q-1}T^*_X \otimes E)$ *telle que*

$$\bar{\partial}_E f = g \quad \text{et} \quad \int_X |f|^2 e^{-2\varphi} dV_\omega \leqslant \frac{1}{q\epsilon} \int_X |g|^2 e^{-2\varphi} dV_\omega.$$

6. Le théorème d'Ohsawa-Takegoshi

Le théorème d'Ohsawa-Takegoshi (et ses multiples variantes) est un des théorèmes les plus fondamentaux de la géométrie complexe actuelle, comme suffisent à le montrer les innombrables conséquences -pas forcément directes bien sûr !- qu'il a eues (théorème d'approximation de Demailly que nous verrons bientôt, théorèmes de restriction et de sous-additivité des idéaux multiplicateurs, ou même encore le théorème d'invariance des plurigenres !). C'est un théorème qui résout un problème naturel, à savoir celui de prolonger des fonctions holomorphes, mais dans un cadre très particulier, au sens où l'on exige un contrôle *uniforme* des normes L^2 des prolongements.

Mais avant de parler du théorème d'Ohsawa-Takegoshi, nous voudrions donner un résultat, de type prolongement de fonction holomorphe avec contrôle de la norme L^2, et que nous avons déjà utilisé lorsqu'on a montré la semi-continuité en la variable d'espace x de $c_x(\varphi)$; il s'agit bien sûr du théorème d'Hörmander-Bombieri-Skoda. Nous n'allons pas donner la preuve (voir [**Hö73**] pour un résultat un peu plus faible), car il s'agit de méthodes qui ont trouvé une naturelle généralisation dans le théorème de Nadel, c'est à dire la résolution générale du $\bar{\partial}$.

Théorème 6.1 **(Hörmander-Bombieri-Skoda)**. — *Soient* φ *une fonction psh sur un ouvert pseudoconvexe borné* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$*, et* $z \in \Omega$*. Si* $e^{-2\varphi}$ *est intégrable au voisinage de* z*, alors pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe une fonction holomorphe* f *sur* Ω *telle que* $f(z) = 1$ *et*

$$\int_\Omega \frac{|f(z)|^2 e^{-2\varphi}}{(1+|z|^2)^{1+\epsilon}} dV(z) < +\infty$$

On va maintenant donner une preuve récente, issue de l'article [**Ber05**], du théorème d'Ohsawa-Takegoshi. Celle-ci a l'avantage d'être beaucoup plus courte que la preuve originale ou ses avatars. Nous donnons seulement la preuve en codimension 1, mais l'article que nous suivons décrit aussi une méthode qui fonctionne en toutes dimensions.

Fixons le cadre : on se donne un domaine pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et V une hypersurface lisse de Ω définie par $V = \{h = 0\}$ où h est une fonction holomorphe sur Ω telle que ∂h ne s'annule pas sur V. Enfin, on se donne φ une fonction plurisousharmonique sur Ω. Alors on peut étendre toute fonction holomorphe sur V qui soit dans $L^2(V, e^{-2\varphi})$ en une fonction sur Ω avec un contrôle de la norme $L^2(\Omega, e^{-2\varphi})$. Plus précisément, l'énoncé est le suivant :

***Théorème 6.2* (Ohsawa-Takegoshi).** — *Supposons $|h| \leqslant 1$ sur Ω. Soit f une fonction holomorphe sur V telle que $\int_V |f|^2 \frac{e^{-2\varphi}}{|\partial h|^2}$ converge , alors il existe une fonction holomorphe F sur Ω telle que $F = f$ sur V et*

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-2\varphi} dV \leqslant C \int_V |f|^2 \frac{e^{-2\varphi}}{|\partial h|^2},$$

où C est une constante universelle.

Remarque 5.
La puissance de ce résultat résulte dans la finitude de la norme L^2 du prolongement, et dans l'universalité de la constante C, car on peut toujours trouver une extension holomorphe de f : en effet, l'obstruction à ce prolongement est décrite par l'espace $H^1(\Omega,\mathscr{I}_V)$, et ce dernier est nul car Ω est un ouvert de Stein.

Démonstration. — Pour simplifier la preuve, dont nous voulons surtout donner l'idée plus que les détails techniques, on suppose que Ω est borné et à bord lisse, puis que h et donc V s'étendent au voisinage de $\overline{\Omega}$. De plus, on supposera que φ est lisse (on peut s'y ramener en écrivant φ comme limite décroissante de fonctions psh lisse, et en utilisant ensuite le théorème de convergence monotone) et s'étend à un voisinage de $\overline{\Omega}$. Enfin, on suppose que f s'étend holomorphiquement à un voisinage de $V \cap \overline{\Omega}$. Remarquons cependant que ces hypothèses ne sont pas contraignantes car il suffit de réduire tout le problème à un sous domaine relativement compact, puis de passer à la limite, ce qui est licite car on obtient une famille normale grâce à l'universalité de la constante, qui ne dépend que de $||h||_\infty$.
Ainsi, on sait qu'il existe une extension de f dans $H^2(\Omega, e^{-2\varphi})$. On choisit F comme étant une extension de norme minimale (l'existence est garantie, comme d'habitude, avec des arguments de famille normale). Alors pour toute fonction G s'annulant sur V, et tout réel $t > 0$, on a $||F+tG||^2 \geqslant ||F||^2$ c'est-à-dire $2\langle F, G\rangle + t||G||^2 \geqslant 0$ et nécessairement, $\langle F, G\rangle \leqslant 0$. Le même argument avec $-G$ montre que F est orthogonale à l'espace des telles fonctions G, donc en particulier à hH^2. De manière équivalente, $\bar{h}F$ est orthogonal à tout H^2, et le domaine étant pseudoconvexe, le supplémentaire orthogonal de $H^2 = \operatorname{Ker} \bar{\partial}$ est précisément l'image de $\bar{\partial}^*$, donc il existe α telle que

$$\bar{h}F = \bar{\partial}^*\alpha$$

et en prenant α de norme minimale, un argument similaire au précédent permet de choisir $\bar{\partial}\alpha = 0$.
On peut commencer à estimer la norme de F. Pour ce faire, on rappelle que comme ∂h ne s'annule pas le long de $V = \{h = 0\}$, la fonction $1/h$ est localement intégrable, donc en particulier définit un courant, et on peut considérer sa dérivée $\bar{\partial}(1/h)$ qui est ce qu'on appelle un courant résiduel. Il est à support sur V -c'est là le point crucial pour la suite- , et on peut en donner une expression assez simple en fonction de la mesure de surface sur V, notée dV (rappelons que sur une variété kählerienne, chaque sous-variété est munie d'une forme volume canonique induite par la restriction de la forme de Kähler de la variété, en l'occurrence $\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$ dans notre cas). Plus précisément, on a la formule suivante :

$$\bar{\partial}\frac{1}{h} = 2\pi \frac{\overline{\partial h}}{|\partial h|^2} dV.$$

En effet, la formule de Lelong-Poincaré s'écrit

$$i\partial\bar{\partial}\log|h|^2 = 2\pi[V]$$

et le membre de gauche vaut :

$$i\partial\bar{\partial}\log|h|^2 = -i\bar{\partial}\frac{\partial h}{h} = i\partial h \wedge \bar{\partial}\frac{1}{h}$$

alors que celui de droite est

$$2\pi[V] = 2\pi\frac{i\partial h \wedge \overline{\partial h}}{|\partial h|^2}dV.$$

Il suffit alors de contracter avec ∂h pour obtenir la formule souhaitée.
Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |F|^2 e^{-2\varphi} &= \int_\Omega \frac{F}{h}\,\overline{\bar{\partial}^*\alpha}\,e^{-2\varphi} \\
&= \int_\Omega F\bar{\partial}\frac{1}{h}\cdot\bar{\alpha}e^{-2\varphi} \\
&= 2\pi\int_V f\overline{\partial h}\cdot\bar{\alpha}\frac{dV}{|\partial h|^2}e^{-2\varphi} \\
&\leqslant 2\pi\left(\int_V |f|^2 e^{-2\varphi}\frac{dV}{|\partial h|^2}\int_V |\partial h\cdot\alpha|^2 e^{-2\varphi}\frac{dV}{|\partial h|^2}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

et donc il nous reste à trouver une estimée de $\int_V |\partial h\cdot\alpha|^2 e^{-2\varphi}\frac{dV}{|\partial h|^2}$ en termes de F. La clé est dans le lemme placé à la fin de la preuve (une démonstration est donnée dans [**Ber96**], où les idées de la preuve discutée ici dont déjà présentes, avec cependant un aspect assez technique qui a disparu dans [**Ber05**]). En effet, on l'utilise avec la $(0,1)$-forme α qui est $\bar{\partial}$-fermée et vérifie $\bar{\partial}^*\alpha = \bar{h}F$. On prend pour w

$$w = \log\frac{1}{|h|^2} + (1 - |h|^{2\delta})$$

avec un certain δ (qu'on prendra proche de 1, par exemple $\delta = 1/2$). Alors, φ et $-w$ sont psh, $\partial\Omega$ pseudoconvexe donc sa forme de Levi est positive, et finalement tous les termes à gauche dans le lemme sont positifs. On ne garde alors que le troisième, et sachant que $\partial\bar{\partial}w = -2\pi[V] - \delta^2|h|^{2\delta-2}\partial h\wedge\overline{\partial h}$, on obtient l'inégalité suivante :

$$2\pi\int_V |\partial h\cdot\alpha|^2 e^{-2\varphi}\frac{dV}{|\partial h|^2} + \delta^2\int_\Omega |\partial h\cdot\alpha|^2 e^{-2\varphi}|h|^{2\delta-2} \leqslant 2\mathrm{Re}\int_\Omega F\overline{\partial h}\cdot\bar{\alpha}\,we^{-2\varphi}.$$

Pour conclure, il faut combler un trou laissé -volontairement ?- dans l'article [**Ber05**]. Voilà une manière de faire :
comme $x^{1-\delta}\log x$ est borné pour $x\in[0,1]$, il existe un réel $C>0$ tel que pour tout $x\in[0,1]$, on ait

$$-\log x^2 + (1 - x^{2\delta}) \leqslant \sqrt{C}\delta x^{\delta-1}$$

et ainsi, comme $|h|\leqslant 1$, on a $w^2 \leqslant C\delta^2|h|^{2\delta-2}$.
En appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'inégalité arithmético-géométrique,

on obtient :

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\int_\Omega F\overline{\partial h}\cdot\bar\alpha\, we^{-2\varphi} &\leqslant 4C\int_\Omega |F|^2e^{-2\varphi}+\frac{1}{C}\int_\Omega |\partial h\cdot\alpha|^2|w|^2e^{-2\varphi}\\ &\leqslant 4C\int_\Omega |F|^2e^{-2\varphi}+\delta^2\int_\Omega |\partial h\cdot\alpha|^2|h|^{2\delta-2}e^{-2\varphi}\end{aligned}$$

et finalement,

$$\int_V |\partial h\cdot\alpha|^2e^{-2\varphi}\frac{dV}{|\partial h|^2}\leqslant\frac{2C}{\pi}\int_\Omega |F|^2e^{-2\varphi},$$

ce que nous cherchions à démontrer. □

Lemme 6.3. — *Soit ρ une fonction définissant Ω (c'est à dire $\rho\in\mathscr{C}^2(\bar\Omega), \rho<0$ sur Ω et $\rho=0, d\rho\neq 0$ sur $\partial\Omega$), et w une fonction positive lisse. Alors pour toute $(0,1)$-forme α lisse dans Ω, qui soit dans le domaine de $\bar\partial^*$ et telle que $\bar\partial\alpha$ et $\bar\partial\bar\partial^*\alpha$ sont dans L^2, on a :*

$$2\int\sum\varphi_{j\bar k}\alpha_j\bar\alpha_ke^{-2\varphi}w+\int|\bar\partial^*\alpha|^2e^{-2\varphi}w-\int\sum w_{j\bar k}\alpha_j\bar\alpha_ke^{-2\varphi}+$$

$$+\int\sum|\bar\partial_k\alpha_j|^2e^{-2\varphi}w+\int_\partial w\sum\rho_{j\bar k}\alpha_j\bar\alpha_ke^{-2\varphi}dS/|\partial\rho|=2\,\mathrm{Re}\int\bar\partial\bar\partial^*\alpha\cdot\bar\alpha e^{-2\varphi}w+\int|\bar\partial\alpha|^2e^{-2\varphi}w.$$

Avant de clore cette section, on donne un énoncé très raffiné du théorème d'Ohsawa-Takegoshi, issu de [**Dem01**]. Rappelons que ceci est la version locale du théorème plus général, valable sur une variété kählerienne faiblement pseudoconvexe.

***Théorème 6.4* (Ohsawa-Takegoshi-Manivel)**. — *Soit $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ un domaine pseudoconvexe borné, et soit $Y\subset\Omega$ une sous-variété complexe lisse de codimension r définie par une section s d'une certain fibré en droites holomorphe hermitien E à tenseur de courbure borné. On suppose que s est partout transverse à la section nulle, et qu'on a l'inégalité $|s|\leqslant e^{-1}$ sur Ω. Alors il existe une constante $C>0$ (dépendant seulement de E) telle que : pour toute fonction psh φ sur Ω, pour toute fonction holomorphe f sur Y telle que $\int_Y|f|^2|\Lambda^r(ds)|^{-2}e^{-2\varphi}dV_Y<+\infty$, il existe une fonction holomorphe F sur Ω prolongeant f telle que*

$$\int_\Omega\frac{|F|^2}{|s|^2\log^2|s|}e^{-2\varphi}dV_\Omega\leqslant C\int_Y\frac{|f|^2}{|\Lambda^r(ds)|^2}e^{-2\varphi}dV_Y.$$

PARTIE III
MESURER LES SINGULARITÉS DES FONCTIONS PSH

Nous avons maintenant vu les propriétés générales des fonctions psh, et discuté de résultats locaux comme globaux importants reliés au comportement des fonctions $e^{-\varphi}$ pour φ une fonction psh. Il est temps d'investiguer un peu plus le comportement singulier des fonctions psh, et pour cela, on va logiquement être amené à étudier des questions d'intégrabilité locale de fonctions du type $fe^{-\varphi}$ pour f holomorphe et φ psh. Dans cette partie, nous allons exposer trois outils majeurs, de nature différente mais finalement très liés, qui vont nous permettre de mesurer plus ou moins précisément le comportement singulier que peuvent avoir les fonctions psh générales.

7. Les nombres de Lelong

Un des premiers invariants introduit pour l'étude ponctuelle des singularités d'une fonction psh est le nombre de Lelong. En réalité, il a été défini directement pour des courants positifs fermés de bidegré (p,p), mais en ce qui nous concerne, nous nous pencherons sur le cas du bidegré $(1,1)$, c'est-à-dire des fonctions psh.
Le nombre de Lelong d'une fonction psh est, comme son nom l'indique, un nombre réel positif qui caractérise les pôles logarithmiques des fonctions psh, et qui est la généralisation naturelle de l'ordre d'annulation pour les fonctions holomorphes :

Définition 7.1. — Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert, et $\varphi \in \mathrm{Psh}(X)$. Le nombre de Lelong $\nu(\varphi, x)$ de φ en un point $x \in \Omega$ est par définition

$$\nu(\varphi, x) = \liminf_{z \to x} \frac{\varphi(z)}{\log|z-x|.}$$

Il n'est pas difficile de voir que $\nu(\varphi, x) = \sup\{\nu \geqslant 0; \varphi(z) \leqslant \nu \log|z-x| + O(1)\}$, et en particulier, ce nombre donne « l'ordre d'annulation » de e^{φ} en x.

> ***Remarque 6.***
> En utilisant la forme normale des fonctions holomorphes, il n'est pas difficile de voir que si f est un biholomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{C}^n$, alors $\nu(f^*\varphi, x) = \nu(\varphi, f(x))$, et ainsi, on peut définir le nombre de Lelong d'une fonction psh définie sur une variété complexe.

Une caractérisation pratique du nombre de Lelong est la suivante ; nous l'utiliserons plus tard pour voir que les approximants de Demailly sont précis au niveau des singularités.

Lemme 7.2. — *Soit φ une fonction psh sur le polydisque unité D de $\mathbb{C}^n$. Alors on a égalité :*

$$\nu(\varphi, 0) = \lim_{r \to 0} \frac{\sup_{B(0,r)} \varphi}{\log r}.$$

En particulier, la limite ci-dessus existe.

Remarque 7.
Cette définition est en fait la plus proche de la définition originelle des nombres de Lelong : pour un courant Θ positif fermé de bidegré (p,p), $\nu(\Theta,x)$ est défini comme la limite quand r tend vers 0 de $r^{-2p}\int_{B(x,r)}\Theta\wedge(dd^c(|z|^2))^p$.

Un des grands théorèmes concernant les nombres de Lelong est le lemme de Skoda que nous donnons ci-dessous. Si le nombre de Lelong est un invariant un peu imprécis pour mesurer les singularités, nous verrons que sous cette forme, le résultat suivant donne des renseignements très utiles.

***Théorème 7.3* (Lemme de Skoda).** — *Soit φ une fonction psh sur un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ et soit $x\in\Omega$.*

(1) *Si $\nu(\varphi,x)<1$, la fonction $e^{-2\varphi}$ est intégrable au voisinage de x ;*

(2) *Si $\nu(\varphi,x)\geqslant n+s$ pour un entier s, alors l'ensemble des germes f de fonctions holomorphes tels que $|f|^2e^{-2\varphi}$ soit intégrable près de x est inclus dans l'idéal $\mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$.*

Démonstration. — Le premier point est un résultat difficile de théorie du potentiel, et constitue ce à quoi l'on réfère par le "lemme de Skoda". Le deuxième point est en revanche très facile : par définition du nombre de Lelong, on a au voisinage de x qu'on prend égal à 0 dans une carte, on a : $\varphi(z)\leqslant(n+s)\log||z||+O(1)$, donc $|f(z)|^2e^{-2\varphi(z)}\geqslant C|f(z)|^2||z||^{2(n+s)}$, et grâce à la formule de Parseval suivie d'un changement de variable polaire puis sphérique, ce dernier terme est intégrable en 0 si et seulement si tous les monômes $z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$ vérifient $\sum\alpha_i\geqslant s+1$, ce qu'il fallait montrer. □

Remarque 8.
En dimension 1, on a donc $e^{-2\varphi}$ intégrable près de x *si et seulement si* $\nu(\varphi,x)<1$.

Une question générale à se poser lorsqu'on dispose d'invariants de type numérique mesurant la singularité, c'est la régularité (en un sens large) de cet invariant. On ne peut pas raisonnablement espérer la continuité, mais peut-être la semi-continuité. On verra dans les lignes qui suivent que les nombres de Lelong -même généraux- sont semi-continus en chacune de le variable. La question de la semi-continuité se posera pour l'exposant de singularité que nous introduirons dans la section suivante : en la variable fonctionnelle, c'est un résultat très difficile de Demailly et Kollár, qui constitue le coeur de ce mémoire.
Pour la preuve du résultat -assez facile- suivant, on renvoit à [**Dem**] :

Proposition 7.4. — *Soit X une variété complexe, $x\in X$. Alors l'application*

$$\varphi\in\mathrm{Psh}(X)\cap L^1_{\mathrm{loc}}(X)\longmapsto\nu(\varphi,x)$$

est semi-continue inférieurement.

On dispose également d'une propriété de semi-continuité en la variable d'espace, mais c'est un résultat difficile dû à Siu, énoncé dans le cas général des (p,p) courants positifs fermés, que nous démontrerons au théorème 11.6 après le théorème d'approximation de Demailly :

***Théorème 7.5* (Siu).** — *Soit φ une fonction plurisousharmonique sur une variété complexe X. Alors pour tout $c > 0$, le sous-niveau du nombre de Lelong*

$$E_c(\varphi) = \{z \in X; \nu(\varphi, z) \geqslant c\}$$

est un ensemble analytique de X.
Autrement dit, la fonction $x \mapsto \nu(\varphi, x)$ est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski holomorphe.

8. Exposant de singularité complexe

8.1. Un nouvel invariant pour les singularités. — On va donner un autre invariant, de type numérique également, qui contient en un sens plus d'informations que ν sur la singularité des fonctions psh :

Définition 8.1. — Soit X une variété complexe, K un compact de X, et φ une fonction psh sur X. L'exposant de singularité complexe de φ sur K est le nombre réel

$$c_K(\varphi) = \sup\{c \geqslant 0\,;\, e^{-2c\varphi} \text{ est } L^1 \text{ sur un voisinage de } K\}.$$

Remarquons que la condition L^1 est licite : on l'impose au voisinage de chaque point de K via des ouverts de cartes, puis on recouvre K par un nombre *fini* de tels voisinages. Ainsi, la condition apparemment globale se vérifie localement, et la définition est bien licite sur une variété complexe quelconque.
On utilise aussi parfois la multiplicité d'Arnold $\lambda_K(\varphi) = c_K(\varphi)^{-1}$. Ainsi, plus la multiplicité d'Arnold est grande, plus la fonction est singulière sur K.

Remarque 9.
Par le lemme de Skoda 7.3, on a $c_K(\varphi) > 0$ dès que $\varphi \not\equiv -\infty$.

Voilà une autre définition équivalente, qui nous sera utile lorsqu'on voudra estimer la croissance de volumes pour les fonction psh :

Proposition 8.2. — *Soit φ une fonction psh sur une variété complexe X, $K \subset X$ un compact, $U \Subset X$ un voisinage relativement compact de K, et μ_U la mesure riemannienne sur U associée à une métrique hermitienne ω sur X. Alors*

$$c_K(\varphi) = \sup\{c \geqslant 0\,;\; r^{-2c}\mu_U(\{\varphi < \log r\}) \textit{ est borné quand } r \to 0, \textit{ pour un certain } U \supset K\}.$$

Démonstration. — Il n'y a pas de difficulté une fois qu'on a écrit :

$$\begin{aligned} r^{-2c}\mu_U(\{\varphi < \log r\}) &= \int_{\{e^{-2c\varphi} > r^{-2c}\}} r^{-2c} dV_\omega \\ &\leqslant \int_U e^{-2c\varphi} dV_\omega \\ &\leqslant \mu_U(U) + \int_0^1 2c r^{-2c} \mu_U(\{\varphi < \log r\}) \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Peut-être peut-on donner une justification pour la dernière inégalité, qui est en fait très courante en probabilités. En effet, si on note $A = \{\varphi < 0\}$ et $B = \{\varphi \geqslant 0\}$, alors $\int_U e^{-2c\varphi} dV_\omega \leqslant \mu_U(B) + \int_A e^{-2c\varphi} dV_\omega \leqslant \mu_U(U) + \int_A e^{-2c\varphi} dV_\omega$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_0^1 2c\, r^{-2c} \mu_U(\{\varphi < \log r\}) \frac{dr}{r} &= \int_0^{+\infty} \mu_U(\{e^{-2c\varphi} > u\}) du \\ &= \int_0^{+\infty} \int_A \mathbb{1}_{\{e^{-2c\varphi} > u\}} dV_\omega \, du \\ &= \int_{z\in A} \int_0^{e^{-2c\varphi(z)}} du \, dV_\omega \\ &= \int_A e^{-2c\varphi} dV_\omega.\end{aligned}$$

□

La proposition suivante, très utile, permet de ramener le calcul de l'exposant de singularité dans le cas où le compact est réduit à un seul point (on notera alors $c_x(\varphi)$ à la place de $c_{\{x\}}(\varphi)$) :

Proposition 8.3. — *Pour toute fonction psh φ et tout compact K, on a*

$$c_K(\varphi) = \inf_{x\in K} c_x(\varphi).$$

Démonstration. — Comme $\forall c < c_K(\varphi), c \leqslant c_x(\varphi)$, on a déjà $c_K(\varphi) \leqslant \inf_{x\in K} c_x(\varphi)$. Pour l'autre inégalité, on remarque que si $c < c_x(\varphi)$ pour un certain $x \in K$, alors il existe un ouvert (qu'on peut choisir trivialisant) U_x tel que $\int_{U_x} e^{-2c\varphi} dV < +\infty$. Par compacité de K, on trouve $x_1, \cdots, x_n \in K$ tels que $U := \cup U_{x_i} \supset K$. Alors, pour $c < \min(c_{x_1}, \cdots, c_{x_n})$, on a que $\forall i, \int_{U_{x_i}} e^{-2c\varphi} dV < +\infty$, et donc $\int_U e^{-2c\varphi} dV < +\infty$, ce qui montre que $c \leqslant c_K(\varphi)$. □

Fixons quelques notations pratiques pour la suite :

- Si $\varphi = \log |f|$ avec f holomorphe, on notera $c_K(f) = c_K(\log |f|)$
- Si $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ est un faisceau d'idéaux cohérent, engendré par des fonctions $(g_1, \cdots, g_n)$ sur un voisinage de K, on note $c_K(\mathscr{I}) = c_k(\log(|g_1| + \cdots + |g_n|))$
- Si T est un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ sur X qui s'écrive $T = dd^c\varphi$ sur un voisinage de K ; on pose $c_K(T) = c_K(\varphi)$.

Bien sûr, l'exposant ne dépend pas du choix des générateurs ou du potentiel psh respectivement. D'autre part, si ces derniers manquent à exister globalement sur un voisinage de K, la proposition précédente nous autorise à découper K en un nombre fini d'ensembles sur lesquels on pourra définir des générateurs (resp. potentiels), pour prendre l'infimum ensuite.

Exemple 8.4. — Par les calculs de l'exemple 9.3, on a que si $\mathscr{I} = (z_1^{m_1}, \ldots, z_p^{m_p}) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, alors $c_0(\mathscr{I}) = \frac{1}{m_1} + \cdots + \frac{1}{m_p}$. On peut aussi retrouver ce résultat par la propriété d'additivité des exposants de singularité, que nous donnerons plus tard.

Exemple 8.5. — Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant 0, telle que $f(0)=0$, alors $c_0(f) \leqslant 1$.
En effet, la propriété est claire pour $n=1$. Ensuite, quitte à restreindre le voisinage considéré et quitte à considérer une branche de l'hypersurface analytique $\{f=0\}$, on peut supposer que df_0 est non nulle, et que l'hypersurface est égale à $\{z_n=0\}$.
Si U tel que $\int_U |f|^{-2} < +\infty$, alors par le théorème de Fubini, il existe $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que $z \mapsto f(a_1, \ldots, a_{n-1}, z)$ définisse une fonction holomorphe nulle en 0 et dont l'inverse soit de carré intégrable au voisinage de 0, c'est absurde.

8.2. Exposant de singularité holomorphe. — Dans le cas où l'on veut étudier des propriétés de type convergence d'intégrales associées à des fonctions psh à singularités analytiques, un outil extrêmement puissant est le théorème de désingularisation de Hironaka qui va nous donner un modèle birationnel de la variété de départ, et sur lequel le faisceau d'idéaux associé devient un faisceau inversible, et, vu comme diviseur, c'est un diviseur à croisements normaux simples (SNC d'après la terminologie anglaise). Plus précisément l'énoncé est le suivant :

***Théorème 8.6* (Hironaka)**. — *Soit X une variété complexe, $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux cohérent définissant un sous-espace Y. Alors il existe une variété $\widetilde{X}$ et un morphisme birationnel $\mu : \widetilde{X} \to X$ tel que*

(1) *μ est un isomorphisme au dessus de du complémentaire de* $\mathrm{Supp}(Y)$ *;*
(2) *$\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \subset \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ est un faisceau inversible $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D)$;*
(3) *$Exc(\mu) \cup D$ est un diviseur snc.*

De plus, μ est une succession d'éclatements de centre lisse. On dit alors que $(\widetilde{X}, \mu)$ est une log-résolution de $\mathscr{I}$.

Rappelons ici que $\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ n'est pas le tiré en arrière au sens des faisceaux de $\mathscr{I}$ mais l'image du faisceau $\mathscr{I}$ vu comme faisceau sur $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ via μ. Ainsi, si $g_1, \ldots, g_N$ sont des générateurs locaux de $\mathscr{I}$, $g_1 \circ \mu, \ldots, g_N \circ \mu$ sont des générateurs locaux de $\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$.

Avant de passer à l'application principale -dans notre optique- du théorème de désingularisation, rappelons la formule de changement de variables pour un changement de coordonnées holomorphes (on note toujours dV la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$) :

Lemme 8.7. — *Soient $U, U' \subset \mathbb{C}^n$ deux ouverts, $\mu : U' \to U$ un biholomorphisme, et $f \in L^1(U)$. Alors $f \circ \mu \in L^1(U')$ et :*

$$\int_U f dV = \int_{U'} f \circ \mu \, |J_\mu|^2 dV$$

Démonstration. — La seule chose à voir est que le jacobien de μ vue comme application entre ouverts de $\mathbb{R}^{2n}$ est bien le module au carré du jacobien de μ vue comme application biholomorphe. Or, si $S_{i,j} \in M_2(\mathbb{R})$ est la similitude de rapport $\partial_i \mu_j$, la matrice jacobienne de μ vaut

$$\begin{pmatrix} S_{1,1} & \cdots & S_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n,1} & \cdots & S_{n,n} \end{pmatrix}$$

Comme les matrices $S_{i,j}$ commutent deux à deux, que $\det S_{i,j} = |\partial_i \mu_j|^2$, et que l'application qui à un complexe donne la matrice de similitude associée respecte le produit et la somme, on obtient le résultat souhaité.
Pour une autre preuve, axée sur le point de vue « formes différentielles », on pourra consulter [**Kra92**]. □

Lemme 8.8. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme birationnel entre deux variétés complexes avec des formes volumes fixées, alors le jacobien complexe de f est une section holomorphe du fibré $K_X \otimes (f^*K_Y)^{-1}$.*

Démonstration. — Ce type de résultat n'est pas du tout spécifique au fibré canonique. Voici la démarche : le morphisme f induit $df : T_X \to f^*T_Y$, et en prenant le dual puis la puissance extérieure maximale, on obtient par définition $J_f : f^*K_Y \to K_X$. Pour plus de clarté et de généralité, on note $L_1 = f^*K_Y$ et $L_2 = K_X$. Alors, en tensorisant le morphisme de fibrés précédent par $id_{L_1^{-1}} : L_1^{-1} \to L_1^{-1}$, on se retrouve avec le morphisme $J_f \otimes id_{L_1^{-1}} : \mathcal{O}_X \to L_2 \otimes L_1^{-1}$, c'est-à-dire une section holomorphe de $L_2 \otimes L_1^{-1}$, ce qui conclut. □

Voyons maintenant comment nous pouvons utiliser le théorème de Hironaka pour obtenir des estimées de volume pour des fonctions psh à singularités analytiques :

Théorème 8.9. — *Soit X une variété complexe, $K \subset X$ un compact, $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux cohérent, et $(\widetilde{X}, \mu, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D))$ une log-résolution de $\mathscr{I}$. On appelle E_i soit le diviseur exceptionnel de μ, soit une composante irréductible de D, et on note $K_{\widetilde{X}} = \mu^*K_X + \sum a_i E_i$ et $D = \sum b_i E_i$. Alors*

(1) *On a l'égalité*

$$c_K(\mathscr{I}) = \min_{i:\mu(E_i)\cap K\neq\emptyset} \left\{ \frac{a_i+1}{b_i} \right\}.$$

(2) *Si $g = (g_1, \ldots, g_N)$ sont des générateurs locaux de $\mathscr{I}$ dans un voisinage de K, alors pour tout voisinage U de K suffisamment petit, on a l'estimée :*

$$C_1 r^{2c} \leqslant \mu_U(\{|g| < r\}) \leqslant C_2 r^{2c} |\log r|^{n-1}, \quad \forall r < r_0$$

où $n = \dim_{\mathbb{C}} X, c = c_K(\mathscr{I})$ et $C_1, C_2, r_0 > 0$.

Démonstration. — On choisit un point $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, puis h_i un générateur local de $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ près de $\tilde{x}$. Par le lemme 8.8, $\operatorname{div}(J_\mu) = \sum a_i E_i$ et $\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-\sum b_i E_i)$. Ainsi, comme les $g_i \circ \mu$ sont des générateurs locaux de $\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ (par définition), on a, au voisinage de $\tilde{x}$ et à facteurs multiplicatifs bornés près :

$$|J_\mu|^2 \sim \prod |h_i|^{2a_i}, \quad |g \circ \mu|^2 \sim \prod |h_i|^{2b_i} \tag{8.1}$$

et ainsi $|g \circ \mu|^{-2c} |J_\mu|^2$ est L^1 près de $\tilde{x}$ si et seulement si $\prod |h_i|^{-2(cb_i - a_i)}$ est L^1, ce qui est équivalent à $cb_i - a_i < 1$ pour tout i tel que $\tilde{x} \in E_i$, vu que les E_i sont à croisements normaux. Par la formule de changement de variables, si U est un ouvert de X, on a

$$\int_U |g(z)|^{-2c} dV(z) = \int_{\zeta \in \mu^{-1}(U)} |g \circ \mu(\zeta)|^{-2c} |J_\mu(\zeta)|^2 d\widetilde{V}(\zeta)$$

ce qui montre que $|g|^{-2c}$ est intégrable si et seulement si $c < \min_{i:\mu(E_i)\cap K\neq\emptyset}\{(a_i+1)/b_i\}$, d'où le premier point.

Passons à l'estimée de volume. Par cette même formule du changement de variable, le volume $\mu_U(\{|g|<r\})$ est donné par la somme d'intégrales dans des cartes $\widetilde{U}_\alpha$ où les équivalents (8.1) sont valides. Plus précisément, le volume en question sera encadré par la somme d'intégrales du type

$$\int_{\mu^{-1}(U)\cap\{\zeta\in\widetilde{U}_\alpha;\prod|h_i|^{b_i}<C_{\alpha_1}r\}} C_{\alpha_2}\prod|h_i|^{2a_i}dV(\zeta)$$

où les C_{α_i} correspondent aux écarts multiplicatifs entre les différents équivalents dans (8.1). Comme il n'y a qu'un nombre fini de telles cartes et que l'inégalité recherchée à la fin ne fait intervenir r qu'à une constante multiplicative près, il suffira donc d'estimer des intégrales comme la précédente où les constantes sont prises égales à 1.
Pour ce faire, on commence par faire un changement de variables $\zeta\mapsto w, w_i=h_i^{b_i}(\zeta), w_j=\zeta_j$ où i parcourt l'ensemble des indices tels que $b_i>0$, alors que j parcourt son complémentaire, et dont le jacobien vaut à constante près $h_i^{1-b_i}=w_i^{(1-b_i)/b_i}$. Pour être précis, il faut faire ce changement de variables sur les ouverts où c'est bien un difféomorphisme, puis, à l'aide de partitions de l'unité, on retrouvera bien l'intégrale désirée sur l'ouvert de départ. Ainsi, il faut estimer les intégrales

$$\int_{P(r)}\prod|w_i|^{2(a_i+1)/b_i-2}dV(w) \quad \text{où } P(r)=\{\max|w_i|<1,\prod|w_i|<r\}$$

l'intégration par rapport aux w_j étant au préalable réalisée, et donnant une constante multiplicative qui n'a pas d'importance pour la suite. D'une part, cette intégrale est minorée par la même où le domaine d'intégration est remplacé par le voisinage d'un point du type $(w_1,\ldots,w_{i_0-1},0,w_{i_0+1},\ldots,w_n)$ (où les w_i sont des complexes non nuls et i_0 est tel que $c_K(\mathscr{I})=(a_{i_0}+1)/b_{i_0}$), donc est minorée par $C_1r^{2c_K(\mathscr{I})}$.
D'autre part, on a pour tout $w\in P(r)$, l'inégalité :

$$\prod|w_i|^{2(a_i+1)/b_i-2}\leqslant\Big(\prod|w_i|\Big)^{2c_K(\mathscr{I})-2}\leqslant r^{2c_K(\mathscr{I})-2}$$

Il reste à estimer le volume de $P(r)$; pour cela, on note

$$V_{n-1}=\{(w_1,\ldots,w_{n-1});\max\{|w_1|,\ldots,|w_{n-1}|\}<1\}.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
\mu(P(r)) &= \int_{V_{n-1}} \int_{\{|w_n|<\min(1,\frac{r}{|w_1\cdots w_{n-1}|})\}} dV(w) \\
&= 2\pi \int_{V_{n-1}} \int_0^{\min(1,\frac{r}{|w_1\cdots w_{n-1}|})} rdr \\
&= \pi \int_{V_{n-1}} \min\left(1, \frac{r^2}{|w_1|^2\cdots|w_{n-1}|^2}\right) \prod_{i=1}^{n-1} dV(w_i) \\
&\leqslant \pi \int_{\{\exists i; |w_i|<r\}} \prod_{i=1}^{n-1} dV(w_i) + \pi r^2 \int_{\{\forall i; r\leqslant |w_i|<1\}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{dV(w_i)}{|w_i|^2} \\
&\leqslant \pi^n r^2 + \pi r^2 \cdot (2\pi|\log r|)^{n-1} \\
&\leqslant C_2 r^2 |\log r|^{n-1}.
\end{aligned}$$

Finalement, en regroupant les deux inégalités, on trouve bien la dernière estimée recherchée. □

8.3. Énoncé du théorème de semi-continuité. — Avant de passer à un des résultats majeurs (si ce n'est le résultat majeur) de ce mémoire, donnons une première propriété de semi-continuité déjà évoluée, dans le cas où la fonction psh est fixée -on pourra faire le parallèle avec le même résultat concernant $\nu(\varphi, \cdot\,)$:

Proposition 8.10. — *Soit $x \in X$ un point, alors la fonction $x \mapsto c_x(\varphi)$ est semi-continue inférieurement pour la topologie de Zariski holomorphe.*

Démonstration. — On va utiliser ici de manière cruciale le théorème de Hörmander-Bombieri-Skoda, que nous énonçons plus tard comme le théorème 6.1. En effet, si x_0 est fixé, et si B désigne une boule $B(x_0, r)$ de coordonnées relativement compacte dans X, notons $\mathcal{H}_{c\varphi}(B)$ l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes de poids L^2 fini, c'est-dire vérifiant : $\int_B |f|^2 e^{-c\varphi} dV < +\infty$. Alors $e^{-c\varphi}$ est L^1 au voisinage de $x \in B$ si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{H}_{c\varphi}(B)$ telle que $f(x) = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\{x \in B; c_x(\varphi) \leqslant c_0\} &= \{x \in B; \forall c > c_0, e^{-2c\varphi} \text{non intégrable en } x\} \\
&= \{x \in B; \forall c > c_0, \forall f \in \mathcal{H}_{2c\varphi}(B), f(x) = 0\} \\
&= \cap_{c>c_0} \cap_{f\in\mathcal{H}_{2c\varphi}(B)} \{f^{-1}(0)\}
\end{aligned}$$

et de dernier est bien un fermé pour la topologie de Zariski holomorphe. □

Voici l'énoncé du théorème principal de [**DK01**], dont la démonstration sera donnée plus tard :

***Théorème 8.11* (Demailly-Kollár).** — *Soit X une variété complexe, et $K \subset X$ un compact. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des fonctions psh localement intégrables sur X, muni de sa topologie naturelle. Alors :*

(1) *L'application $\varphi \mapsto c_K(\varphi)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{P}(X)$;*

(2) *(Version effective) Soit $\varphi \in \mathcal{P}(X)$ donnée. Si $c < c_K(\varphi)$ et ψ converge vers φ dans $\mathcal{P}(X)$, alors $e^{-2c\psi}$ converge vers $e^{-2c\varphi}$ en norme L^1 sur un certain voisinage de K.*

Comme cas particulier, on obtient :

(3) *L'application $\mathcal{O}(X) \ni f \mapsto c_K(f)$ est semi-continue inférieurement pour la topologie de convergence uniforme sur les compacts. De plus, si $c < c_K(f)$ et g converge vers f dans $\mathcal{O}(X)$ alors $|g|^{-2c}$ converge vers $|f|^{-2c}$ en norme L^1 sur un certain voisinage de K.*

Remarque 10.
Bien sûr, ce résultat est très spécifique au cas complexe : en effet, prenons $f(x) = \sqrt{x}$ approchée uniformément sur $[0,1]$ par une suite P_n de polynômes qu'on peut prendre nuls en 0. Alors, on a pour tout n l'inégalité $c_0(P_n) \leqslant 1/2$ alors que $c_0(f) = 1$.

Pour saisir la puissance de cet énoncé et appréhender les problèmes qui apparaissent au cours de sa démonstration, nous allons donner une démonstration du dernier point du théorème, dans le cas (très) simplifié de la dimension 1.

On se donne donc une suite de fonctions holomorphes f_n qui converge uniformément sur un compact $K \subset \mathbb{C}$ (d'intérieur non vide) vers f, et on veut étudier les fonctions $|f_n|^{-2c}$ au voisinage d'un compact $L \subset \mathring{K}$. On peut alors se ramener à $L = \{0\}$ en isolant les zéros de f. Mais alors, la semi-continuité de c_0 est évidente : $f(z) \sim_0 Az^k$ pour un certain $k \geqslant 0$ et $A \neq 0$ (on suppose f non nulle, le résultat étant évident sinon !), et alors $c_0(f) = \frac{1}{k}$. Par convergence des dérivées en 0, on voit que pour n grand, le coefficient du développement de f_n devant z^k est non nul. Autrement dit, $f_n(z) \sim_0 A_n z^{k_n}$ pour un certain $k_n \leqslant k$ et $A_n \neq 0$. Alors pour tout $c < \frac{1}{k_n}$, $|f_n|^{-2c}$ est L^1 sur un voisinage de 0, en particulier, pour tout $c < c_0(f)$, $|f_n|^{-2c}$ est L^1 sur un voisinage de 0, donc $c_0(f_n) \geqslant c_0(f)$.

Il nous faut maintenant trouver un ouvert U contenant 0 tel que toutes les $|f_n|^{-2c}$ soient dans $L^1(U)$ pour n assez grand. Mais par le théorème de Rouché, il existe un disque $D(r_0) = D(0, r_0)$ tel que toutes les f_n aient exactement k zéros (avec multiplicité) dans $D(r_0)$ pour $n \gg 0$. En particulier, les $|f_n|^{-2c}$ sont dans $L^1(D(r_0))$ pour $n \gg 0$. Il reste à étudier la convergence dans L^1 vers $|f|^{-2c}$, c'est là le point difficile.

On va montrer que pour tout $c < c_0(f)$, il existe une constante $M(c)$ et un ouvert U contenant 0 tels que pour tout $n \gg 0$, $\int_U |f_n|^{-2c} dV \leqslant M(c)$. Ceci montrera que la famille des $\left(|f_n|^{-2c}\right)_{n \geqslant n_0}$ est bornée dans L^p pour un $p > 1$ (on le voit en appliquant cette majoration aux $|f_n|^{-2c'}$ avec $c < c' < c_0(f)$). Ainsi, elle sera équiintégrable par un résultat classique (bien noter ici que la mesure de U est finie), et en particulier, elle convergera en norme L^1, vers $|f|^{-2c}$ nécessairement.

On se donne donc deux disques centrés en 0, de rayon $r' < r < r_0$ tels que f_n ait exactement k zéros avec multiplicité dans $D(0, r)$ (pour n assez grand) : on les note $z_{1,n}, \ldots, z_{k_n,n}$ De plus, on peut supposer, comme les zéros de f_n tendent vers 0 par le théorème de Rouché, que ceux-ci sont contenus dans $D(0, r')$. Alors, on écrit

$$f_n(z) = \prod_{i=1}^{k_n} (z - z_{i,n})^{m_{i,n}} h_n(z) \quad \text{et} \quad f(z) = z^k h(z).$$

Montrons que (h_n) est localement bornée : par le principe du maximum,

$$\sup_{z\in D(0,r)} |h_n(z)| = \sup_{|z|=r} |h_n(z)|.$$

Or, pour $|z| = r$, $|z - z_{i,n}| \geqslant r - r'$, et ainsi, comme les f_n sont uniformément bornées sur ce disque, il en est de même des h_n. Ainsi, (h_n) admet une valeur d'adhérence pour la convergence uniforme sur $D(0,r)$, mais comme (h_n) converge vers h presque partout (en dehors d'un ensemble dénombrable plus précisément), toute valeur d'adhérence de (h_n) (qui est donc continue) coïncide avec h presque partout, est égale à h. Ainsi, (h_n) admet une unique valeur d'adhérence, h, et (h_n) converge vers h uniformément sur $D(0,r)$. Comme $|h| \geqslant C_1 > 0$ sur un voisinage de 0, il en est de même pour h_n avec n grand. Alors,

$$\int_{D(0,r)} |f_n|^{-2c} dV \leqslant C_2 \int_{D(0,r)} \prod_{i=1}^{k_n} |z - z_{i,n}|^{-2cm_{i,n}} dV(z).$$

Il s'agit de majorer cette dernière intégrale dans le cas $k_n > 1$. Comme $k = \sum_{i=1}^{k_n} m_{i,n}$, l'inégalité de Hölder généralisée avec $p_i = \frac{k}{m_{i,n}} > 1$ s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{D(0,r)} \prod_{i=1}^{k_n} |z - z_{i,n}|^{-2cm_{i,n}} dV(z) &\leqslant \prod_{i=1}^{k_n} \left(\int_{D(0,r)} |z - z_{i,n}|^{-2cm_{i,n}\times p_i} dV(z) \right)^{1/p_i} \\ &= \prod_{i=1}^{k_n} \left(\int_{D(0,r)} |z - z_{i,n}|^{-2kc} dV(z) \right)^{1/p_i} \end{aligned}$$

Or, chaque intégrale dans le produit est majorée par

$$I(r) = \int_{D(0,2r)} |z|^{-2kc} dV(z) = \frac{\pi (2r)^{2(1-kc)}}{(1-kc)} \leqslant 1$$

pour r assez petit. L'intégrale recherchée est donc majorée par $I(r)^{k_n/k} \leqslant 1$, ce qui conclut !

9. Les faisceaux d'idéaux multiplicateurs

Depuis déjà un certain nombre de pages, on a recours aux fonctions holomorphes f telles que $fe^{-\varphi}$ soit localement L^2. Il est temps de leur donner un nom ! La formalisation de l'étude de ces fonctions du point de vue géométrique a été faite par Nadel en 89 à des fins de géométrie différentielles liées à l'équation d'Einstein sur les variétés de Fano ; nous y reviendrons dans la dernière partie. Il se trouve que l'objet algébrique -c'est un faisceau d'idéaux- qu'il introduit a une importance fondamentale est géométrie complexe, comme on le verra dans la partie suivante. A nouveau, il s'agit d'un outil qui mesure les singularités des fonctions psh :

Définition 9.1. — Soit X une variété complexe, φ une fonction psh sur un ouvert $\Omega \subset X$. Le faisceau d'idéaux multiplicateurs associé à φ, $\mathscr{I}(\varphi)$, est formé des germes de fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}_{\Omega,x}$ telles que $|f|^2 e^{-2\varphi}$ soit intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dans des coordonnées locales quelconques près de x.

Le résultat suivant, et plus particulièrement sa preuve (nous ne la donnons pas ici, mais dans une version légèrement modifiée, à la proposition 13.7) , va jouer un rôle crucial pour approcher une fonction psh par des fonctions à singularités analytiques avec un bon contrôle sur les multiplicités d'Arnold.

***Théorème 9.2* (Nadel, 1989).** — *Pour toute fonction psh φ sur $\Omega \subset X$, le faisceau $\mathscr{I}(\varphi)$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur Ω.*

Avant de développer plus de théorie, donnons maintenant un exemple où l'on peut donner explicitement $\mathscr{I}(\varphi)$.

Exemple 9.3. — On choisit $\varphi = \frac{\alpha}{2}\log(|z_1|^{2\alpha_1} + \cdots + |z_p|^{2\alpha_p})$, où les α_j sont des nombres réels strictement positifs. Si $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ est un n-uplet d'entiers, on note $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdots z_n^{\beta_n}$. On veut alors savoir pour quelles fonctions $f(z) = \sum a_\beta z^\beta$ on a

$$I = \int_{D(0,1)^n} \frac{|f(z)|^2}{(|z_1|^{\alpha_1} + \cdots + |z_p|^{\alpha_p})^\alpha} dV(z) < +\infty$$

où $D(0,1) \subset \mathbb{C}$ est le disque unité. En écrivant $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, on trouve :

$$I = \int_{[0,1]^n \times [0,2\pi]^n} \frac{|\sum_\beta a_\beta r_1^{\beta_1} \cdots r_n^{\beta_n} e^{i(\beta_1\theta_1 + \cdots + \beta_n\theta_n)}|^2}{(r_1^{2\alpha_1} + \cdots + r_p^{2\alpha_p})^\alpha} r_1 dr_1 \cdots r_n dr_n \, d\theta_1 \cdots d\theta_n$$

Mais en appliquant la formule de Parseval lors de l'intégration de θ_1 sur $[0, 2\pi]$, on obtient :

$$(2\pi)^n \sum_\beta |a_\beta|^2 \int_{[0,1]^n} \frac{r_1^{2\beta_1+1} \cdots r_n^{2\beta_n+1}}{(r_1^{2\alpha_1} + \cdots + r_p^{2\alpha_p})^\alpha} dr_1 \cdots dr_n$$

Grâce au lemme 9.4 donné ci-dessous, ceci montre que $\mathscr{I}(\varphi)$ est engendré par des monômes, et il suffit alors de déterminer les β telle que l'intégrale ci-dessus converge. On peut alors éliminer les $n - p$ dernières variables puis faire le changement de variable $t_i = r_i^{\alpha_i}$, qui donne

$$\int_{[0,1]^p} \frac{r_1^{2\beta_1+1} \cdots r_p^{2\beta_p+1}}{(r_1^{2\alpha_1} + \cdots + r_p^{2\alpha_p})^\alpha} dr_1 \cdots dr_p = \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \int_{[0,1]^p} \frac{t_1^{\frac{2(\beta_1+1)}{\alpha_1}} \cdots t_p^{\frac{2(\beta_p+1)}{\alpha_p}}}{(t_1^2 + \cdots + t_p^2)^\alpha} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_p}{t_p}$$

Or, la convergence de cette intégrale sur $[0,1]^p$ est équivalente à celle sur la boule unité de $\mathbb{R}^p$. D'autre part, on remarque que l'intégrande F est homogène de degré $N = \sum \frac{2(\beta_j+1)}{\alpha_j} - p - 2\alpha$. On pense donc au changement de variable naturel pour se ramener à la convergence de

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{S}_+^{p-1}} r^{N+p-1} F(s) dr ds$$

où $\mathbb{S}_+^{p-1} = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}_+^p ; x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 1\}$. Mais

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}_+^{p-1}} F(s) ds &= \int_{(t_1, \cdots, t_p) \in \mathbb{S}_+^{p-1}} t_1^{\frac{2(\beta_1+1)}{\alpha_1} - 1} \cdots t_p^{\frac{2(\beta_p+1)}{\alpha_p} - 1} ds((t_1, \cdots, t_p)) \\
&\leqslant \int_{[0,1]^p} t_1^{\frac{2(\beta_1+1)}{\alpha_1} - 1} \cdots t_p^{\frac{2(\beta_p+1)}{\alpha_p} - 1} dt_1 \cdots dt_p
\end{aligned}$$

qui converge car pour tout j, $\frac{2(\beta_j+1)}{\alpha_j} - 1 > -1$. Ainsi, tout se ramène à la convergence de $\int_0^1 r^{N+p-1} dr$, qui est équivalente à la condition

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\beta_j + 1}{\alpha_j} > \alpha.$$

Pour résumer, $\mathscr{I}(\varphi)$ est engendré par les monômes $z_1^{\beta_1} \cdots z_n^{\beta_n}$ satisfaisant l'inégalité ci-dessus.

Lemme 9.4. — *Si $\mathscr{I}$ est un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ des germes de fonctions holomorphes en $0 \in \mathbb{C}^n$, tel que pour tout $f \in \mathscr{I}$, les monômes de f sont aussi dans $\mathscr{I}$, alors $\mathscr{I}$ est un idéal monomial.*

Démonstration. — La première étape consiste à voir que pour un ensemble I (dénombrable) de monômes en n variables, on peut extraire un sous-ensemble fini J de I tel que tous les éléments de I sont divisibles par un élément de J.
On raisonne par l'absurde. En supposant donc que la propriété énoncée plus haut n'est pas vraie, il existe une suite $(u_k)_{k \geqslant 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^n$ telle que $z^{u_{k+1}}$ ne soit divisible par aucun des z^{u_p} pour $p \leqslant k$. En termes de quantificateurs :

$$\exists\, \sigma : \mathbb{N}^2 \to \{1, \ldots, n\}; \quad \forall k \geqslant 2, \forall j < k,\ (u_k)_{\sigma(j,k)} < (u_j)_{\sigma(j,k)},$$

où $(u_k)_i$ désigne la i-ème composante du vecteur u_k.
Comme la suite $\sigma(k-1, k)$ est à valeurs dans un ensemble fini, on peut trouver une extractrice $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $\sigma(\psi(k) - 1, \psi(k))$ soit constante, par exemple égale à 1. Mais alors, pour tout $k \geqslant 2$, on a : $(u_{\psi(k)})_1 < (u_{\psi(k)-1})_1$, ce qui est impossible car $(u_k)_1$ est un entier positif.
Quant à la seconde étape, c'est le résultat du lemme.
Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ est noethérien, $\mathscr{I}$ est de type fini, donc il existe une famille finie génératrice $(f_1, \ldots, f_p)$. Pour tout indice k, on considère l'idéal monomial $\mathcal{I}_k$ of $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ engendré par les monômes de f_k. D'après la première étape, il existe un nombre fini de monômes minimaux apparaissant dans le développement de f_k, et tous les autres monômes de f_k sont divisibles par ces derniers. Ainsi, on a montré que f_k appartient à l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ engendré par un nombre fini de monômes de f_k. En regroupant tous ces monômes minimaux des $f_1, \ldots, f_k$, on voit que $\mathscr{I}$ est engendré par un nombre fini de monômes.

□

L'exemple précédent montre comment la définition analytique du faisceau d'idéaux multiplicateurs permet dans de bons cas de déterminer parfaitement ce dernier. Mais on peut aussi recourir à des méthodes plus algébriques :

Exemple 9.5. — Si $\varphi = \sum \alpha_i \log|f_i|$ où les $D_i = f_i^{-1}(0)$ sont des diviseurs irréductibles lisses à croisements normaux, alors il n'est pas difficile de voir que

$$\mathscr{I}(\varphi) = \mathcal{O}_X(-\sum \lfloor \alpha_i \rfloor D_i).$$

Dans le cas général de singularités analytiques, c'est-à-dire si

$$\varphi = \alpha \log(|f_1| + \cdots + |f_N|) + O(1)$$

au voisinage des pôles, alors en notant $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux (intégralement clos) engendré par les (f_i), on peut trouver (grâce à Hironaka) une modification lisse $\mu : \widetilde{X} \to X$ de X telle que $\mathscr{I} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ soit un faisceau inversible $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D)$ tel que $D + K_{\widetilde{X}/X}$ soit un diviseur à croisements normaux simples. Si on écrit $D = \sum a_j D_j$ et si $\mathrm{div}(J_\mu) = \sum b_j D_j$ est le diviseur des zéros du jacobien de μ, alors les calculs de [**DBIP96**] montrent que

$$\mathscr{I}(\varphi) = \mu_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(\sum (b_j - \lfloor \alpha a_j \rfloor) D_j).$$

10. L'exemple des fonctions psh radiales

Avant d'aller plus loin dans la théorie, nous allons étudier un cas très particulier de fonctions psh sur lequel nous nous sommes penché, mais qui au fond constitue un assez grand nombre d'exemples ; il s'agit des fonctions psh à symétrie radiale. Alors, le but de cette partie est de donner une description géométrique de l'idéal multiplicateur associé à une telle fonction, généralisant ainsi un résultat connu dans le cadre algébrique (théorème de Howald [**How01**]).

10.1. Idéaux multiplicateurs des fonctions psh radiales. — Dans toute la suite, nous allons nous intéresser aux fonctions psh radiales sur un polydisque $D(0,r) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, |z_i| < r\}$. C'est un type particulier de polydisque (on prend un même rayon r pour chaque coordonnée), mais comme tous les résultats qui suivront sont de nature purement locale, cela n'a pas d'importance (on pourrait même prendre $r = 1$ en fait). La dimension n est fixée pour toute la suite.
Précisons qu'une fonction radiale sur $D(0,r)$ est une fonction qui ne dépend que des modules $|z_1|, \ldots, |z_n|$. Alors, dans le cas où cette fonction est aussi psh, on connait assez précisément sa forme :

Proposition 10.1. — *Soit φ une fonction psh radiale sur $D(0,r)$. Alors il existe une fonction f convexe et croissante en chacune de ses variables, définie sur $]-\infty, \log r[^n$ telle que pour tout $z = (z_1, \ldots, z_n) \in D(0,r)$, on ait $\varphi(z) = f(\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$.*

Démonstration. — Soit g définie par $g(w_1, \ldots, w_n) = \varphi(e^{w_1}, \ldots, e^{w_n})$, autrement dit $g = \exp^* \varphi$, et en particulier g est psh. Comme φ est radiale, g en dépend que de la partie réelle de w, et on sait alors par la proposition 2.2 que g est une fonction convexe de $\mathrm{Re}(w)$. Alors, on a $\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \varphi(|z_1|, \ldots, |z_n|) = g(\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$ ce qui montre la première assertion. Quant à la deuxième, on va montrer pour simplifier que g, vue comme fonction sur $]-\infty, \log r[^n$ est croissante en la première variable. On fixe donc $x_i = \log|z_i|$ pour $i \geqslant 2$, et on prend deux réels $\log|z_x| = x \leqslant y = \log|z_y|$ dans $]-\infty, \log r[$. Alors, on considère le compact $K = \overline{D_{\mathbb{C}}(0, |z_y|)} \times \prod\{|z_i|\}$. Comme φ est psh, elle définit une fonction sous-harmonique d'une variable complexe z sur K, qui atteint alors son maximum sur $\{|z| = |z_y|\} \times \prod\{|z_i|\}$ ou encore sur $\{|z_y|\} \times \prod\{|z_i|\}$ car φ est radiale. En particulier, $g(x, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(|z_x|, |z_2|, \ldots, |z_n|) \leqslant \varphi(|z_y|, |z_2|, \ldots, |z_n|) = g(y, x_2, \ldots, x_n)$ ce que l'on voulait montrer. □

Avant de passer aux résultats importants de cette partie, on fixe quelques notations pratiques :

• Tout d'abord, on introduit ici un ordre partiel sur $\mathbb{R}^n$, en posant

$$(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i \leqslant y_i.$$

On définit de même $\prec$ de la manière évidente.

• Si φ est une fonction psh radiale sur $D(0, r)$, associée à la fonction convexe f, on note g la fonction concave définie sur $[\log(r), +\infty[^n$ par $g(x) = -f(-x)$.

• Si f est une fonction réelle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, on note (lorsque ces quantités sont définies) $\nabla f(v)$ (resp $\nabla^+ f(v)$) le gradient (resp. le gradient à droite, c'est-à-dire $(\frac{\partial^+ f}{\partial x_1}(v), \cdots, \frac{\partial^+ f}{\partial x_n}(v))$, où le $+$ signifie dérivée à droite) de f en $v \in U$.

• On note dV la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Le résultat suivant est la pierre angulaire pour la suite de cette partie :

Proposition 10.2. — *Soit φ une fonction psh radiale sur $D(0, r)$, g la fonction concave associée sur $[\log(r), +\infty[^n$, et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$. On note $A = (\alpha) + \mathbb{1} = (\alpha_i + 1)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'intégrale

$$\int_{D(0,r)} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(z_1, \ldots, z_n)} dV(z)$$

est convergente ;

(ii) Il existe $v \in [\log(r), +\infty[^n$ tel que $\nabla g(v)$ existe, et $\nabla g(v) \prec A$;

(iii) Il existe $v \in [\log(r), +\infty[^n$ tel que $\nabla^+ g(v) \prec A$.

Démonstration. — On commence par faire les changements de variables $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, donc l'intégrale devient, à un facteur $(2\pi)^n$ près :

$$\int_{[0,r]^n} r_1^{2\alpha_1+1} \cdots r_n^{2\alpha_n+1} e^{-2f(\log r_1, \ldots, \log r_n)} dr_1 \cdots dr_n$$

On pose ensuite $t_i = -\log(r_i)$, ce qui donne

$$\int_{[\log(r), +\infty[^n} e^{-(2\alpha_1+2)u_1} \cdots e^{-(2\alpha_n+2)u_n} e^{2g(u_1, \ldots, u_n)} du_1 \cdots du_n$$

ou encore

$$\int_{[\log(r), +\infty[^n} e^{2g(x) - 2\langle A, x\rangle} dx.$$

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* On suppose qu'en tout point où $\nabla g(v)$ existe, il existe i tel que la i-ème composante de $\nabla g(v)$ soit $\geqslant A_i$. On sait (par exemple [**RV73**]) que g est différentiable presque partout, on définit alors E^0 l'ensemble des points où g est différentiable, et E_i le sous-ensemble de E^0 formé des points v tels que $\frac{\partial g}{\partial x_i}(v) \geqslant A_i$. Il est en fait plus utile de regarder

$$E = \bigcup_{\mu(E_i) > 0} E_i$$

et quitte à réordonner, $E = E_1 \cup \cdots \cup E_p$ pour un certain $p \leqslant n$. On a toujours $\mu({}^c E) = 0$.

Alors on ne peut avoir pour tout $i \leqslant p$, $E_i \subset \mathbb{R}^{i-1} \times F_i \times \mathbb{R}^{n-i}$ avec $\mu({}^cF_i) > 0$ (complémentaire dans $[\log r, +\infty[$) : en effet, on aurait sinon

$$ {}^cE = {}^cE_1 \cap \cdots \cap {}^cE_p \supset ({}^cF_1 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \cdots \cap (\mathbb{R}^{p-1} \times {}^cF_p \times \mathbb{R}^{n-p}) = {}^cF_1 \times \cdots \times {}^cF_p \times \mathbb{R}^{n-p} $$

ce qui donnerait

$$ 0 \geqslant \prod_{i=1}^{p} \mu({}^cF_i) \times \mu(\mathbb{R}^{n-p}) > 0 $$

On choisit alors un i (qu'on prendra égal à 1 pour simplifier les notations) tel que les composantes en i de E_i, notées $E_i^i \subset [\log r, +\infty[$ soient de mesure pleine dans $[\log r, +\infty[$. Alors, si v est fixé dans E_1, on peut écrire grâce à la concavité de g, pour $t \in E_1^1$,

$$ \begin{aligned} g(v_1 + t, v_2, \ldots, v_n) - g(v) &= \int_0^t \frac{\partial^+ g}{\partial x_1}(v_1 + u, v_2, \ldots, v_n) du \\ &= \int_{[0,t] \cap E_1^1} \frac{\partial g}{\partial x_1}(v_1 + u, v_2, \ldots, v_n) du \\ &\geqslant tA_1. \end{aligned} $$

Ainsi,

$$ \int_{\log r}^{+\infty} \exp\Big(g(v_1 + t, v_2, \ldots, v_n) - \langle A, (v_1 + t, v_2, \ldots, v_n)\rangle\Big) dt \geqslant C(v)\, \mu(E_1^1) = +\infty. \tag{10.1} $$

Ceci étant vrai pour tout $v \in E_1$, et comme $\mu(E_1) > 0$, il existe un sous-ensemble $W \subset [\log r, +\infty[^{n-1}$ de mesure > 0 pour lequel $t \mapsto \exp(g(t, w) - \langle A, (t, w)\rangle)$ ne soit pas intégrable sur $[\log r, +\infty[$. Le théorème de Fubini montre alors que $\exp(g - \langle A, \cdot\rangle)$ n'est pas intégrable sur $[\log r, +\infty[^n$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ est évident.

$(iii) \Rightarrow (i)$ On choisit un point v comme dans l'hypothèse. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $\nabla^+ g(v) \prec A - \epsilon \mathbb{1}$. Mais alors pour tout x dans le convexe $[\log r, +\infty[^n$, on a

$$ g(x) - g(v) \leqslant \langle \nabla^+ g(v), x - v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i^+ g(v)(x_i - v_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (A_i - \epsilon) x_i + C $$

On en déduit que

$$ \begin{aligned} \int_{[\log(r), +\infty[^n} e^{2g(x) - 2\langle A, x\rangle} dx &\leqslant C' \int_{[\log(r), +\infty[^n} e^{-2\epsilon \sum_i x_i} dx_1 \cdots dx_n \\ &= C' \prod_{i=1}^{n} \int_{\log(r)}^{+\infty} e^{-2\epsilon x_i} dx_i \\ &< +\infty \end{aligned} $$

$\square$

On renvoie au paragraphe sur les idéaux adjoints, et plus précisément à 13.14 pour la définition de l'idéal $\mathscr{I}_+(\varphi)$ associé à une fonction psh. Alors, la proposition précédente jointe au fait que l'idéal multiplicateur d'une fonction psh radiale est monomial donne le résultat suivant :

Corollaire 10.3. — *La conjecture d'ouverture généralisée $\mathscr{I}_+(\varphi) = \mathscr{I}(\varphi)$ est vérifiée pour les fonctions φ psh radiales.*

On est maintenant en mesure de décrire précisément le faisceau d'idéaux multiplicateurs associée à toute fonction psh à symétrie radiale.
Pour cela, si φ est radiale sur $D(0,1)$ (on prend $r = 1$ dans le but de simplifier les notations, ce qui ne nuit pas à la généralité, rappelons le), associée à g concave, alors on note

$$P(\varphi) = \bigcup_{v \in \mathbb{R}_+^n} \{\nabla^+ g(v) + (\mathbb{R}_+^*)^n\}$$

Ainsi, si $c > 0$, $P(c\varphi) = c \cdot P(\varphi)$. Une autre remarque, importante pour la suite, est que l'ensemble des n-uplets de réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tels que $\int_{D(0,1)} |z_1|^{2\alpha_1} \cdots |z_n|^{2\alpha_n} e^{-2\varphi(z_1,\dots,z_n)} dV(z)$ converge est convexe : en effet, l'inégalité de Hölder peut se reformuler en disant que la fonction

$$A \in \mathbb{R}^n \mapsto \log \int_U e^{-2\langle A,x\rangle} e^{-2g(x)} dx$$

est convexe.
Ainsi $P(\varphi)$ admet une autre description : c'est l'intérieur de l'enveloppe convexe supérieure dans $\mathbb{R}_+^n$ des points $\nabla^+ g(v), v \in \mathbb{R}_+^n$.

Alors, la proposition 10.2 jointe à la description précédente de $P(\varphi)$ donne tout de suite le résultat suivant, qui peut être vu comme un analogue ou une généralisation au cadre algébrique du théorème de Howald énoncé dans [**Laz04**] :

Théorème 10.4. — *Soit φ une fonction psh radiale, alors $\mathscr{I}(\varphi)$ est un idéal monomial engendré par les $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ tels que :*

$$\alpha + \mathbb{1} \in P(\varphi)$$

Démonstration. — La seule chose à voir est que $\mathscr{I}(\varphi)$ est monomial, mais la preuve est exactement la même que celle de l'exemple 9.3. $\square$

10.2. Exemples. — Dans cette section, nous allons nous concentrer sur deux exemples typiques, correspondant respectivement à

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{k}{2} \log \left(\sum_{i=1}^n e^{2\alpha_i x_i} \right)$$

(ici, il est plus simple de travailler avec f plutôt que g, mais bien sûr, comme $\nabla g(x) = \nabla f(-x)$, l'énoncé de la proposition reste le même avec f ou g, il faut juste changer $[\log r, +\infty[^n$ en $]-\infty, -\log(r)]^n$) ce qui nous conduira à retrouver les résultats de l'exemple 9.3 , et à

$$g(x_1, \dots, x_n) = k\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

pour des bons $\alpha_i \geqslant 0$.

10.2.1. Premier exemple. — Commençons par la fonction : $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{k}{2} \log\left(\sum_{i=1}^n e^{2\alpha_i x_i}\right)$, qui est convexe pour tous $\alpha_i \geqslant 0$. On a

$$\nabla_i f(x) = \frac{k\alpha_i e^{\alpha_i x_i}}{\sum_{k=1}^n e^{\alpha_k x_k}}$$

et on cherche les $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tels qu'il existe $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_-^n$ vérifiant pour tout i tel que $\alpha_i \neq 0$,

$$\frac{e^{\alpha_i x_i}}{\sum_{k=1}^n e^{\alpha_k x_k}} < \frac{1}{k} \frac{\beta_i + 1}{\alpha_i}$$

Guidés par l'exemple 9.3, on peut penser que le résultat suivant est vrai :

Lemme 10.5. — *Soient $y_1, \ldots, y_n$ des réels strictement positifs, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) $y_1 + \cdots + y_n > 1$

(*ii*) *Il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$y_i > \frac{e^{x_i}}{e^{x_1} + \cdots + e^{x_n}}.$$

Démonstration. — On remarque déjà qu'un sens est évident.
Quant à l'autre, il y a plusieurs façons possibles de procéder. Un moyen très rapide de conclure est de considérer les $z_i = \frac{y_i}{y_1 + \cdots + y_n}$. On pose alors $x_i = \log z_i \in \mathbb{R}_-^*$, comme $\sum z_i = 1$, on a

$$\frac{e^{x_i}}{\sum_{k=1}^n e^{x_k}} = e^{x_i} = z_i < y_i$$

car $y_1 + \cdots + y_n > 1$. □

Alors, on applique ce lemme pour trouver pour tout i tel que $\alpha_i \neq 0$ un x_i vérifiant $\frac{e^{\alpha_i x_i}}{\sum_{k=1}^n e^{\alpha_k x_k}} < \frac{1}{k} \frac{\beta_i + 1}{\alpha_i}$. Quant aux autres i, il n'y a rien à imposer aux β_i (la condition s'écrit $\beta_i + 1 > 0$).

En conclusion, on a bien montré que $\mathscr{I}(\frac{k}{2} \log(\sum |z_i|^{2\alpha_i}))$ est engendré par les monômes z^β tels que

$$\sum_{\alpha_i > 0} \frac{\beta_i + 1}{\alpha_i} > k$$

10.2.2. Second exemple. — Passons maintenant à $g(x_1, \ldots, x_n) = k\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, avec $k > 0$ et $\alpha_i \geqslant 0$ pour tout i.
La première à question à se poser est si cette fonction est concave ou pas. Comme g est $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[^n$, on peut calculer sa Hessienne en un tel point :

$$\mathrm{Hess}_g(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1(\alpha_1 - 1)}{x_1^2} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{x_1 x_2} & \cdots & \frac{\alpha_1 \alpha_n}{x_1 x_n} \\ \frac{\alpha_2 \alpha_1}{x_2 x_1} & \frac{\alpha_2(\alpha_2 - 1)}{x_2^2} & \cdots & \frac{\alpha_2 \alpha_n}{x_2 x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha_n \alpha_1}{x_n x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\alpha_n(\alpha_n - 1)}{x_n^2} \end{pmatrix}$$

On veut voir à quelle condition cette matrice est négative. Or, une matrice (a_{ij}) est négative si et seulement si pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, la matrice $(\lambda_i \lambda_j a_{ij})$ l'est aussi. En prenant $\lambda = (x_1, \cdots, x_n)$, on se ramène à la matrice :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_1 - 1) & \alpha_1\alpha_2 & \cdots & \alpha_1\alpha_n \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2(\alpha_2 - 1) & \cdots & \alpha_2\alpha_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_1\alpha_n & \cdots & \cdots & \alpha_n(\alpha_n - 1) \end{pmatrix}$$

Ainsi, il suffit d'appliquer le critère de Gauss à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_n \\ -\alpha_1 & 1 - \alpha_2 & \cdots & -\alpha_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & \cdots & \cdots & 1 - \alpha_n \end{pmatrix}$$

Or, chacune sous-matrice principale (de type $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$) est somme de I_k et d'une matrice de rang 1, et de trace $-\sum_{i \leqslant k} \alpha_i$, donc est de déterminant $1 - \sum_{i \leqslant k} \alpha_i$. Ainsi, g est concave si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant 1$$

On fait cette hypothèse par la suite.
On peut maintenant suivre la méthode donnée par la proposition 10.2 : on calcule le gradient de g en $x \in]0, +\infty[^n$, il vaut :

$$\nabla_i g(x) = \frac{\alpha_i g(x)}{x_i}$$

On cherche les $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ tels qu'il existe $x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ vérifiant pour tout $\alpha_i \neq 0$ (pour les autres i, il n'a y toujours pas de conditions à imposer car on s'intéresse à des monômes donc les β_i sont toujours positifs) l'inégalité :

$$\frac{k\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}}{x_i} < \frac{\beta_i + 1}{\alpha_i}$$

Ici, l'exemple est très intéressant car on observe deux comportements très différents selon les α_i :

- Si $\sum_i \alpha_i < 1$, alors $\nabla_i g(N, \dots, N) = k\alpha_i N^{\sum \alpha_i - 1}$ tend (pour tout i) vers 0 quand N tend vers l'infini, donc la condition devient vide.

- En revanche, si $\sum \alpha_i = 1$, on est dans le cas extrêmal, et la condition devient $\prod_i \left(\frac{\beta_i+1}{k\alpha_i}\right)^{\alpha_i} > 1$ (on fait le produit toujours sur les i tels que $\alpha_i \neq 0$).

Pour le voir, un sens est évident en faisant le produit terme à terme de chaque inégalité. La réciproque est plus subtile, de même que dans l'exemple précédent. À nouveau, résumons les idées dans un lemme :

Lemme 10.6. — *Soient $y_1, \dots, y_n$ des réels strictement positifs, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ strictement positifs de somme égale à 1. Alors on a équivalence* *(i) On a l'inégalité :*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} > 1$$

(ii) Il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{y_i}{\alpha_i} > \frac{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}}{x_i}.$$

Démonstration. — On pose $A_i = \frac{y_i}{\alpha_i}$, puis pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on pose $x_i = \frac{1}{A_i}$, et on définit $x_n = \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-\alpha_i/\alpha_n}$. Ainsi, $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = 1$, et comme $A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n} > 1$, on en déduit $x_n^{\alpha_n} > A_n^{-\alpha_n}$, ou encore : $A_n > \frac{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}}{x_n}$. Ainsi, en prenant $x_n' = x_n + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on obtient pour tout i : $A_i > \frac{x_1^{\alpha_1} \cdots x_n'^{\alpha_n}}{x_i}$. □

On peut résumer tout cela dans la proposition suivante :

Proposition 10.7. — *Soit $\varphi(z) = -k\,|\log|z_1||^{\alpha_1} \cdots |\log|z_n||^{\alpha_n}$ où les α_i sont des réels positifs de somme inférieure ou égale à 1, et $k > 0$ est un réel. Alors φ est psh sur $D(0,1)$, et :*

- *Soit $\sum \alpha_i < 1$, et alors $\mathscr{I}(\varphi) = \mathcal{O}_{D(0,1)}$.*
- *Soit $\sum \alpha_i = 1$ et alors $\mathscr{I}(\varphi)$ est engendré par les z^β tels que :*

$$\prod_{\alpha_i > 0} \left(\frac{\beta_i + 1}{k\alpha_i}\right)^{\alpha_i} > 1$$

PARTIE IV
LES IDÉAUX MULTIPLICATEURS EN GÉOMÉTRIE COMPLEXE

On a vu dans la partie précédente la définition des idéaux multiplicateurs, ainsi que des cas particuliers où on savait déterminer plus ou moins explicitement cet idéal. Dans le cas général, on ne sait pas le calculer, mais au fond, ce n'est pas très grave car il n'y a pas forcément besoin de connaître exactement l'idéal pour pouvoir l'utiliser. Cette partie est consacrée à l'utilisation de cet outil algébrique : c'est cet idéal qui donnera les bons approximants du théorème de Demailly, qui donnera le bon faisceau pour avoir un théorème général d'annulation de la cohomologie... Nous verrons aussi comment cet idéal se comporte vis-à-vis des restrictions, en introduisant un idéal adjoint *analytique.*

11. Approximation des fonctions psh

Il s'agit ici de présenter un résultat de Demailly montrant entre autres qu'une fonction psh est approchable (pour les topologie produit et L^1) par des fonctions de type $\alpha\log(\sum_{n=0}^{+\infty}|f_n|^2)$ où $\alpha\in\mathbb{Q}$, et les f_n sont holomorphes, telles que la série dans le logarithme converge localement uniformément, et définit une fonction réelle analytique. C'est un théorème fondamental, car ces dernières fonctions psh aux singularités analytiques bien comprises approchent les fonctions psh général avec un bon contrôle sur les singularités.

Mais avant d'entrer dans les détails, nous donnons quelques rappels concernant les espaces de Bergman de fonctions L^2 holomorphes définies sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Définition 11.1. — Soient $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ un ouvert, φ une fonction psh sur Ω. On note $H^2(\Omega,\varphi)$ l'espace des fonctions f holomorphes sur Ω de poids L^2 fini, *ie* telles que $\int_\Omega |f|^2e^{-2\varphi}dV<+\infty$, où dV est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$.

Le résultat suivant, bien que facile à établir, est la pierre angulaire de la théorie des espaces de Bergman :

Proposition 11.2. — *L'espace $H^2(\Omega,\varphi)$ est fermé dans $L^2(\Omega,e^{-2\varphi}dV)$, ce qui lui confère une structure d'espace de Hilbert.*

Plus précisément, la topologie L^2 sur $H^2(\Omega,\varphi)$ est plus forte que celle de la convergence uniforme sur les compacts.

Démonstration. — On va directement montrer la dernière assertion, et voir comment la première s'y ramène. Soit donc $K\subset\Omega$ un compact, et $f\in H^2(\Omega,\varphi)$. Comme φ est scs sur K, elle y est majorée, donc $\alpha=\inf_K e^{-2\varphi}>0$.

On choisit alors $z\in K$, $r<d(z,\partial\Omega)$, et on note m_r le volume de la boule $B(z,r)$. Comme f est pluriharmonique, on a $f(z)=m_r^{-1}\int_{|\zeta-z|<r}f(\zeta)dV(\zeta)$, donc

$$|f(z)|^2\leqslant\frac{1}{m_r}\int_{|\zeta-z|<r}|f(\zeta)|^2dV(\zeta)\leqslant\frac{1}{\alpha m_r}\int_{|\zeta-z|<r}|f(\zeta)|^2e^{-2\varphi(\zeta)}dV(\zeta)\leqslant C||f||_2^2$$

où $C = (\alpha m_r)^{-1}$ ne dépend que de K. Ainsi, $||f||_{K,\infty} \leqslant C'||f||_2$, ce qui montre le premier point.

Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite dans $H^2(\Omega,\varphi)$ convergeant vers $f \in L^2(\Omega, e^{-2\varphi}dV)$ pour la norme L^2, elle admet une sous-suite $(f_{\sigma(n)})$ qui converge vers f presque partout. Par l'inégalité précédente, cette (sous)-suite est localement uniformément bornée, donc par le théorème de Montel, elle admet une sous-suite $(f_{\sigma\circ\psi(n)})$ convergeant uniformément sur tout compact vers g holomorphe. Par unicité de la limite, on a l'égalité $f = g$ presque partout. Il reste à voir que l'égalité est vraie partout. Pour cela, on remarque que comme (f_n) est de Cauchy pour la norme L^2, elle l'est également pour la norme uniforme sur tout compact prescrit, donc elle converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue qui est nécessairement f (en effet, sur un compact, la topologie de convergence uniforme est plus forte que la topologie L^2). Ainsi, $f = g$ partout. □

Comme $L^2(\Omega, e^{-2\varphi}dV)$ est séparable, il en est de même de $H^2(\Omega,\varphi)$, et on peut donc se donner une base hilbertienne $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de ce dernier espace. On a alors le lemme :

Lemme 11.3. — *Avec les notations précédentes, la série $\sum_n |f_n|^2$ converge normalement sur tout compact de Ω et définit une fonction réelle analytique.*

Démonstration. — Tout d'abord, on a la convergence ponctuelle car $\sum_n |f_n(z)|^2$ est le carré de la norme L^2 de l'opérateur $\Psi_z : f \mapsto f(z)$ (continu par la proposition précédente) défini sur $H^2(\Omega,\varphi)$. En effet, si

$$g_N = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^N |f_k(z)|^2\right)^{1/2}} \sum_{k=1}^N \overline{f_k(z)} f_k$$

alors g_N est de norme 1 (sur $L^2(\Omega,\varphi)$), et $|\Psi_z(g_N)|^2 = \sum_{k=1}^N |f_k(z)|^2$, d'où $||\Psi_z||^2 \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(z)|^2$, l'autre inégalité étant évidente par Cauchy-Schwarz.

On pose alors $g_z = \lim g_N$, et on se place maintenant sur $\Omega' \subset \Omega$ relativement compact, où φ y est donc majorée. On a pour tout z, $||g_z||_{L^2(\Omega,\varphi)} = 1$ donc $||g_z||^2_{L^2(\Omega')} \leqslant C_1$ indépendante de z. Par équivalence des normes $L^2(\Omega')$ et $L^\infty(\Omega')$, ceci implique que $\sup_z ||g_z||_{L^\infty(\Omega')} \leqslant C_2$. En particulier, on a pour tout z : $\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k(z)|^2 \leqslant C_2^2$. On intègre cette inégalité sur Ω', ce qui montre que $\sum_{k=1}^{+\infty} ||f_k||^2_{L^2(\Omega')}$ converge, et à nouveau par l'équivalence des normes,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ||f_k||^2_{L^\infty(\Omega')} < +\infty$$

ce qui montre la convergence normale de la série en question sur Ω'.
Quant à la réelle-analyticité de la fonction somme, c'est un résultat classique pour les fonctions du type $\sum |f_n|^2$, avec les f_n holomorphes, et qui convergent uniformément. □

On peut maintenant passer au résultat fondamental de Demailly sur l'approximation en un sens très fort d'une fonction psh donnée par des fonctions à singularités analytiques. La méthode est la suivante : on part de φ psh sur un ouvert pseudoconvexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, et on fixe une base (hilbertienne) $(g_{m,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $H^2(\Omega, m\varphi)$. Les résultats ci-dessus nous permettent de définir la fonction réelle analytique $\psi_m = \frac{1}{2m}\log(\sum |g_{m,k}|^2)$. On dispose alors du

***Théorème 11.4* (Demailly).** — *Avec les notations précédentes :*

(1) *Il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ indépendantes de m et φ telles que pour tout $z \in \Omega$ et $r < d(z, \partial\Omega)$, on ait*

$$\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \leqslant \psi_m(z) \leqslant \sup_{|\zeta - z| < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}.$$

En particulier, quand $m \to +\infty$, ψ_m converge vers φ ponctuellement et pour la topologie L^1_{loc} sur Ω ;

(2) *De plus, concernant les singularités sur un compact $K \subset \Omega$, on a les inégalités suivantes :*

$$\lambda_K(\varphi) - \frac{1}{m} \leqslant \lambda_K(\psi_m) = \frac{1}{m} \lambda_K(\mathscr{I}(m\varphi)) \leqslant \lambda_K(\varphi);$$

(3) *Enfin, concernant les nombres de Lelong en $z \in \Omega$,*

$$\nu(\varphi, z) - \frac{n}{m} \leqslant \nu(\psi_m, z) \leqslant \nu(\varphi, z).$$

Démonstration. — D'après les résultats préliminaires de cette partie, on voit que

$$\psi_m(z) = \frac{1}{m} \sup_{f \in B(1)} \log |f(z)|$$

où $B(1)$ désigne la boule unité de $H^2(\Omega, m\varphi)$. Ainsi, pour $r < d(z, \partial\Omega)$, l'inegalité de la moyenne pour $|f|^2$ psh donne :

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &\leqslant \frac{1}{\pi^n r^{2n}/n!} \int_{|\zeta - z| < r} |f(\zeta)|^2 dV(\zeta) \\ &\leqslant \frac{1}{\pi^n r^{2n}/n!} \sup_{|\zeta - z| < r} e^{2m\varphi(\zeta)} \int_{|\zeta - z| < r} |f(\zeta)|^2 e^{-2m\varphi(\zeta)} dV(\zeta) \end{aligned}$$

En passant au sup pour f parcourant $B(1)$, on obtient

$$\psi_m(z) \leqslant \sup_{|\zeta - z| < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{2m} \log \frac{1}{\pi^n r^{2n}/n!}.$$

La seconde inégalité, garantissant que ψ_m est moins singulière que φ est bien plus profonde, et provient du théorème d'Ohsawa-Takegoshi. En effet, on fixe $z \in \Omega$, ce qui définit une sous-variété de dimension 0, et alors pour tout $a \in \mathbb{C}$, il existe une fonction holomorphe sur Ω telle que $f(z) = a$ et

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-2m\varphi} dV \leqslant C_3 |a|^2 e^{-2m\varphi(z)},$$

où C_3 est un constante qui ne dépend que de Ω. Alors, on choisit a de telle sorte que le membre de droite vaille 1. Ainsi, $f \in B(1)$, et donc $\psi_m(z) \geqslant \frac{1}{m} \log |a| = \varphi(z) - \frac{\log C_3}{2m}$.

Passons à la deuxième partie : tout d'abord, par l'inégalité ci-dessus, il est clair que $\lambda_K(\psi_m) \leqslant \lambda_K(\varphi)$. On voudrait maintenant se ramener au cas où ψ_m est à singularités analytiques, c'est-à-dire qu'on cherche une inégalité du type

$$\psi_m - C_4 \leqslant \frac{1}{2m} \log \sum_{k=0}^{k_0(m)} |g_{m,k}|^2 \leqslant \psi_m \tag{11.1}$$

sur un ouvert Ω' relativement compact dans Ω. Mais on sait que $\mathscr{I}(m\varphi)$ est engendré par ses sections globales d'après la preuve du théorème de Nadel sur la cohérence du faisceau en question. Alors, par la propriété noethérienne forte, si on se donne un ouvert relativement compact $\Omega' \supset K$, le faisceau $\mathscr{I}(m\varphi)$ est engendré (librement, quitte à réordonner les indices) par un nombre fini de fonctions $(g_{m,k})_{0\leqslant k\leqslant k_0(m)}$. Pour simplifier les notations, on pose $f_k = g_{k,m}$. On écrit alors, pour tout $n > k_0(m)$:

$$f_n = \sum_{i=0}^{k_0(m)} \lambda_{i,n} f_i$$

où $\lambda_{i,n} \in \mathbb{C}$ est la projection $p_i(f_n)$ de $f_n \in H^2(\Omega', m\varphi)$ sur $\mathbb{C}f_i$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(f_j, j \in \{0,\dots,k_0(m)\} - \{i\})$. Or, pour tout $z \in \Omega'$, la série $\sum_k |g_{m,k}|^2$ converge normalement sur Ω'. En particulier,

$$\sum_n |\lambda_{i,n}|^2 \leqslant \sum_n ||p_i||^2 ||f_n||^2_{L^2(\Omega', m\varphi)} \leqslant C||p_i||^2 \sum_n ||f_n||^2_{L^\infty(\Omega')}$$

et la somme en question est finie par convergence normale. Ainsi,

$$\sum_{n>k_0(m)} |f_n|^2 \leqslant \sum_{n>k_0(m)} \left[\sum_{i=0}^{k_0(m)} |\lambda_{i,n}|^2 \cdot \sum_{i=0}^{k_0(m)} |f_i|^2\right] \leqslant \sum_{i=0}^{k_0(m)} |f_i|^2 \cdot \sum_{i,n} |\lambda_{i,n}|^2$$

Alors,

$$\psi_m = \frac{1}{2m} \log \sum_{k=0}^{+\infty} |f_n|^2 \leqslant \frac{1}{2m} \log\left((1 + \sum_{i,n} |\lambda_{i,n}|^2) \sum_{k=0}^{k_0(m)} |f_k|^2\right)$$

ce qui est l'inégalité (11.1) recherchée en posant $C_4(m) = \frac{1}{2m}\log(1 + \sum_{i,n} |\lambda_{i,n}|^2)$.
En particulier, on a l'égalité $\lambda_K(\psi_m) = \frac{1}{m}\lambda_K(\mathscr{I}(m\varphi))$.

On fait maintenant la remarque que l'intégrale $\int_{\Omega'} e^{2m(\psi_m-\varphi)}dV$ converge. En effet, celle-ci est majorée par :

$$e^{2mC_4} \sum_{k=0}^{k_0(m)} \int_{\Omega'} |g_{m,k}|^2 e^{-2m\varphi} dV \leqslant e^{2mC_4} \int_{\Omega} |g_{m,k}|^2 e^{-2m\varphi} dV \leqslant e^{2mC_4}(k_0(m)+1).$$

Ainsi, si $\lambda > \lambda_K(\psi_m)$, l'inégalité de Hölder avec les exposants $p = 1 + m\lambda$ et $q = 1 + (m\lambda)^{-1}$ donne pour tout $\Omega' \supset K$, puisque $mqp^{-1} = m(q-1) = \lambda^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} e^{-2mp^{-1}\varphi} dV &= \int_{\Omega'} e^{2mp^{-1}(\psi_m-\varphi)} e^{-2mp^{-1}\psi_m} dV \\
&\leqslant \left(\int_{\Omega'} e^{2m(\psi_m-\varphi)} dV\right)^{1/p} \left(\int_{\Omega'} e^{-2\lambda^{-1}\psi_m} dV\right)^{1/q} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

La finitude de cette intégrale est bien équivalente à l'inégalité recherchée, car elle est vraie pour tout $\lambda > \lambda_K(\psi_m)$, et $pm^{-1} = \lambda + \frac{1}{m}$.

Il reste le dernier point sur les nombres de Lelong. L'inégalité de droite est facile car φ est plus singulière que ψ_m, *ie* $\varphi(z) \leqslant \psi_m(z) + C$. Pour obtenir l'inégalité de gauche, on écrit la majoration obtenue au point 1 puis on passe au supremum dans une boule de rayon r :

$$\sup_{|x-z|<r} \psi_m(x) \leqslant \sup_{|\zeta-z|<2r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}.$$

On divise cette inégalité par $\log r < 0$, et on fait tendre r vers 0. Le lemme 7.2 permet alors de conclure. □

Remarque 11.
Il faut faire attention au fait que cette approximation peut parfois, même dans des cas très simples, être assez large voire inutile. En effet, si on cherche à approximer $\varphi(z) = \log |z|$, alors ψ_m a les mêmes singularités que $(1 - \frac{1}{m}) \log |z|$ par un calcul facile, et ainsi, $\mathscr{I}(\psi_m) = \mathcal{O}_X$ est trivial alors que $\mathscr{I}(\varphi) = \mathfrak{m}_0$ est engendré par $z_1, \ldots, z_n$.

Dans le cas où φ est d'exponentielle hölderienne, on peut raffiner encore l'approximation :

Proposition 11.5. — *Avec les notations du théorème précédent, et si e^φ est hölderienne d'exposant α sur un ouvert $U \subset \Omega$ alors il existe un ouvert $V \subset U$ tel que :*

$$\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \leqslant \psi_m(z) \leqslant \left(1 - \frac{n}{m\alpha}\right) \varphi(z) + O(1)$$

pour tout $z \in V$ tel que $\varphi(z) \neq -\infty$.

Démonstration. — Comme $\sup_{|\zeta-z|\leqslant r} e^{\varphi(\zeta)} = \sup_{|\zeta-z|=r} e^{\varphi(\zeta)}$ la condition hölderienne montre que

$$\sup_{|\zeta-z|<r} e^{\varphi(\zeta)} \leqslant e^{\varphi(z)} + Ar^\alpha.$$

En prenant $r = \epsilon e^{\varphi(z)/\alpha}$ avec ϵ suffisamment petit pour que $B(z,r) \subset U$, alors on obtient :

$$\psi_m(z) \leqslant \varphi(z) + \log(1 + A\epsilon) + \frac{\log C_2}{m} - \log r^{n/m} \leqslant \left(1 - \frac{n}{m\alpha}\right) \varphi(z) + O(1)$$

□

Pour finir cette partie, nous allons donner un théorème, dû à Siu (1974) dans le cadre plus général des courants de bidegré (p,p), qui exprime l'analyticité des sous-niveaux de nombres de Lelong. La preuve originale est longue et technique, mais Demailly a utilisé son résultat d'approximation précédemment mentionné pour en donner une preuve très simplifiée, que nous allons présenter.

***Théorème 11.6* (Siu)**. — *Soit φ une fonction plurisousharmonique sur une variété complexe X. Alors pour tout $c > 0$, le sous-niveau du nombre de Lelong*

$$E_c(\varphi) = \{z \in X; \nu(\varphi, z) \geqslant c\}$$

est un ensemble analytique de X.

Démonstration. — L'analycité se vérifiant localement, on se ramène au cas où φ est définie sur un ouvert pseudoconvexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Alors la double inégalité $\nu(\varphi) \geqslant \nu(\psi_m) \geqslant \nu(\varphi) - \frac{n}{m}$ montre que l'égalité, pour m_0 assez grand :

$$E_c(\varphi) = \bigcap_{m \geqslant m_0} E_{c-n/m}(\psi_m).$$

$\square$

Tout se ramène donc à montrer le résultat pour les fonctions à singularités analytiques. Or, $\nu(\varphi, z)$ est l'ordre d'annulation de e^{φ} en z, donc si $\varphi = \log \sum |f_k|$, alors $\nu(\varphi, z)$ est l'ordre d'annulation en z de $\sum |f_k|$ et donc $\nu(\varphi, z) \geqslant c$ est équivalent à ce que pour tout multi-indice α d'ordre $< c$, on ait $f_k^{(\alpha)}(z) = 0$, ce qui conclut la preuve.

12. Le théorème d'annulation de Nadel

Le théorème de Nadel, qui, une fois la notion d'idéal multiplicateur introduite, est essentiellement une reformulation cohomologique du théorème 5.7, se révèle être d'une importance centrale en géométrie complexe.
Par exemple, il contient le théorème de plongement de Kodaira et sa généralisation (en géométrie algébrique) connue sous le nom de théorème de Kawamata-Viehweg. A la base, ce théorème, démontré dans [**Nad90**], a été introduit pour donner un critère d'existence de métrique de Kähler-Einstein à courbure (scalaire) positive. Dans la partie VI, nous expliquerons plus précisément en quoi le théorème d'annulation de Nadel permet de donner des conditions suffisantes (intéressantes) garantissant l'existence de métriques de Kähler-Einstein.

Le théorème de Nadel est un théorème d'annulation de la cohomologie des faisceaux. Mais le calcul de cette cohomologie ne se fait (presque) jamais directement, et on utilise le théorème de De Rham-Weil, qui dit que si $(\mathcal{A}^\bullet, d)$ est une résolution d'un faisceau $\mathscr{F}$ par des faisceaux acycliques (*ie* $H^s(X, \mathcal{A}^q) = 0$ pour tout $q \geqslant 0$ et $s \geqslant 1$), alors il y a un isomorphisme fonctoriel

$$H^q(\Gamma(X, \mathcal{A}^\bullet)) \longrightarrow H^q(X, \mathscr{F}).$$

Une fois ces rappels établis, on peut passer au théorème d'annulation :

Théorème 12.1 **(Nadel)**. — *Soit* (X, ω) *une variété kählerienne de dimension* n*, supposée faiblement pseudoconvexe. On considère* E *un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne singulière* h *de poids local* φ*. Supposons qu'il existe une fonction continue strictement positive* ϵ *sur* X *telle que* $i\Theta(E) \geqslant \epsilon\omega$*. Alors*

$$\forall q \geqslant 1, \quad H^q(X, \mathcal{O}_X(K_X + E) \otimes \mathscr{I}(h)) = 0.$$

Démonstration. — On note $\mathcal{A}^q$ le faisceau des germes de (n, q)-formes u à valeurs dans E et à coefficients mesurables, telles que à la fois $|u|^2 e^{-2\varphi}$ et $|\bar{\partial}_E u|^2 e^{-2\varphi}$ soient localement intégrables. L'opérateur $\bar{\partial}_E$ définit un complexe de faisceaux $(\mathcal{A}^\bullet, \bar{\partial}_E)$ qui est une résolution du faisceau $\mathcal{O}_X(K_X + E) \otimes \mathscr{I}(\varphi)$:

· En degré 0, le noyau de $\bar{\partial}_E$ consiste en les germes de n-formes holomorphes à valeurs dans E satisfaisant la condition d'intégrabilité, donc dont la fonction coefficient (vue dans une trivialisation de X et donc de E) est dans $\mathscr{I}(\varphi)$.

· En degré $q \geqslant 1$, c'est une conséquence immédiate du théorème 5.7 appliqué à des boules suffisamment petites (pour avoir à la fois $|\bar{\partial}_E u|^2 e^{-2\varphi}$ intégrable et $i\Theta(E) \geqslant \delta\omega$ avec $\delta > 0$ constante).

Comme chaque $\mathcal{A}^q$ est un $\mathscr{C}^\infty$-module $\mathcal{A}^\bullet$ est une résolution de acyclique. Le théorème de De Rham-Weil rappelé ci-dessus montre alors que pour tout q, on a un isomorphisme

$$H^q(\Gamma(X, \mathcal{A}^\bullet)) \simeq H^q(X, \mathcal{O}_X(K_X + E) \otimes \mathscr{I}(\varphi))$$

et il reste à montrer que le terme de gauche est toujours nul.
Pour ce faire, on choisit ψ une fonction d'exhaustion psh sur X, et on applique le théorème 5.7 *globalement* sur X, avec E muni de la métrique $h' = e^{-\chi\circ\psi} h$, où χ est une fonction convexe croissante en chaque variable, de croissance arbitrairement rapide à l'infini. Comme ψ est une

fonction d'exhaustion, l'intégrabilité locale de $|u|^2 e^{-2\varphi}$ et celle de $|u|^2 e^{-2(\varphi+\chi\circ\psi)}$ sont équivalentes. Mais en choisissant χ à croissance suffisamment rapide, plus précisément de telle sorte que pour une forme $\bar\partial_E$-fermée u donnée, on ait $|u|^2 e^{-2(\varphi+\chi\circ\psi)}$ intégrable sur X (χ dépend de la forme u), on montre que toute forme globale $\bar\partial_E$-fermée est $\bar\partial_E$-exacte (cette notion ne dépend pas de la métrique de E), d'où le résultat. □

Nous aimerions maintenant donner une preuve du théorème de plongement de Kodaira s'appuyant sur le théorème de Nadel, en suivant un exercice de [**DBIP96**]. L'idée est qu'en un point où la métrique (d'un fibré bien choisi) admet une singularité isolée suffisamment importante, alors l'espace des sections globales de ce fibré va engendré les s-jets de sections au point considéré.

Plus précisément, il s'agit du corollaire suivant :

Corollaire 12.2. — *Soient $(X^n, \omega), E, \varphi$ comme dans le théorème de Nadel, on suppose qu'il existe $x \in X$ tel que $\nu(\varphi, x) \geqslant n+s$ pour un entier $s \geqslant 0$, et que $e^{-2\varphi}$ est localement intégrable au voisinage de tout $y \neq x$ assez voisin de x. Alors $H^0(X, K_X+E)$ engendre les s-jets de sections au point x.*

Démonstration. — Les hypothèses impliquent que $\mathscr{I}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}_{X,x}^{s+1}$ et que pour $y \neq x$ voisin, $\mathscr{I}(\varphi)_y = \mathcal{O}_{X,y}$. Or, le théorème de Nadel montre qu'on a une surjection

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X+E)) \twoheadrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X+E) \otimes (\mathcal{O}_X/\mathscr{I}(\varphi))).$$

Or, au voisinage de x, le faisceau $\mathcal{O}_X/\mathscr{I}(\varphi)$ et donc également le faisceau $\mathcal{O}_X(K_X+E)\otimes(\mathcal{O}_X/\mathscr{I}(\varphi))$, sont des faisceaux gratte-ciel, et pour un tel faisceau $\mathscr{F}$, on a toujours une surjection $\mathscr{F}(X) \twoheadrightarrow \mathscr{F}_x$ obtenue en prolongeant par 0 n'importe quel élément de $\mathscr{F}_x$.
Ainsi, on a une surjection

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X+E)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(K_X+E)_x \otimes (\mathcal{O}_X/\mathscr{I}(\varphi))_x.$$

Or, comme $\mathscr{I}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}_{X,x}^{s+1}$, on a une surjection naturelle $(\mathcal{O}_X/\mathscr{I}(\varphi))_x \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x}^{s+1}$, et ce dernier idéal est exactement constitué des s-jets de sections de $\mathcal{O}_X$ au point x, ce qui conclut après tensorisation par K_X+E. □

Remarque 12.
Le même résultat est vrai si au lieu de prendre un seul point x, on en prend plusieurs $x_1, \ldots, x_N \in X$ vérifiant les mêmes hypothèses. En effet, la seule chose à vérifier est que si $\mathscr{F}$ est un faisceau gratte-ciel au voisinage des x_j, alors on a une surjection $\mathscr{F}(X) \twoheadrightarrow \bigoplus \mathscr{F}_{x_j}$, ce qui est facile à voir.

Nous sommes maintenant tout près du théorème de Kodaira, que nous énonçons donc :

***Théorème 12.3* (Kodaira)**. — *Soit X une variété kählerienne compacte, et L un fibré en droites holomorphe. Alors L est ample si et seulement s'il admet une métrique à courbure positive.*

Démonstration. — Si L est ample, alors on peut voir X comme sous-variété de $\mathbb{P}^N$, et L comme restriction à X du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$. Alors la restriction de la métrique de Fubini-Study à X répond à notre problème.
Inversement, supposons donnés une métrique lisse h_0 à courbure positive, de poids local φ, ainsi

que $x_1, \dots x_N \in X$. On va montrer que pour m grand, ne dépendant que de N et de L, on a une surjection

$$H^0(X, L^{\otimes m}) \twoheadrightarrow \bigoplus_{j=1}^{N} (J^s L^{\otimes m})_{x_j}, \tag{12.1}$$

où $J^s L^{\otimes m}$ est l'espace des s-jets de sections de $L^{\otimes m}$. Par la proposition 11.10 du chapitre VII de [**Dem**], cela montrera que L est ample.
Pour montrer la surjection (12.1), on construit une fonction à pôles logarithmiques en les x_j, qu'on notera ψ. Plus précisément, en isolant des ouverts de trivialisation disjoints contenant les points x_j, on peut imposer $\psi(z) = \log |z - x_j|$ dans une carte U_j, et avec un argument de partition de l'unité, on peut peut globaliser la construction, tout en gardant la condition précédente sur des $V_j \Subset U_j$.
On voudrait maintenant construire une métrique h à courbure positive sur L par $h = h_0 e^{-\epsilon\psi}$, pour $\epsilon > 0$ petit. Mais ceci se vérifie localement : sur les V_j, ψ est psh donc $\varphi + \epsilon\psi$ est bien strictement psh. Puis, sur le compact $\overline{X - \cup V_j}$, ψ est lisse donc il existe $C > 0$ telle que $i\partial\bar{\partial}\psi \geqslant -C\omega$. On peut alors choisir ϵ tel que $i\Theta_{h_0}(L) - \epsilon C\omega$ soit positive (*ie* il existe $\delta > 0$ tel que cette dernière quantité soit $\geqslant \delta\omega$). On remarque ici que ϵ ne dépend que de N (et de L bien sûr).
Ensuite, en prenant $m \geqslant s/\epsilon + n/\epsilon$, la métrique $h^{\otimes m}$ sur $L^{\otimes m}$ est toujours à courbure positive, et a un poids local φ_m vérifiant pour tout j, $\nu(\varphi_m, x_j) \geqslant n + s$.
Alors, on peut appliquer la remarque 12 suivant le corollaire 12.2 au fibré en droites $E = -K_X + mL$ muni de la métrique induite par $h^{\otimes m}$ et une métrique lisse quelconque sur K_X.

□

13. Idéaux adjoints analytiques

Cette section, assez conséquente, est consacrée à un travail que nous avons réalisé dans le but de généraliser la notion d'idéal adjoint algébrique. En un mot, cet idéal décrit précisément les phénomènes de restriction de fonctions appartenant à certains idéaux multiplicateurs. Nous donnons donc une définition cohérente avec le cadre algébrique, et nous montrons ensuite l'exactitude de la suite d'adjonction dans un cadre nécessairement un peu restreint, à savoir celui des fonctions hölderiennes psh. En particulier, on peut ainsi retrouver à partir du cas local, une version faible du théorème global de Manivel. Le dernier paragraphe étudie les propriétés d'un idéal adjoint plus naturel, mais qui ne saurait cependant généraliser l'adjoint algébrique.

13.1. Restriction et adjonction. — Cette partie va illustrer la force du théorème d'Ohsawa-Takegoshi à travers deux résultats assez fondamentaux, qui lient des conditions d'intégrabilité globales à celles en restriction à une sous-variété. Le premier résultat constitue l'étape cruciale pour la sous-additivité de l'exposant de singularité complexe.

Proposition 13.1. — *Soit φ une fonction psh sur une variété complexe X et $Y \subset X$ une sous-variété complexe telle que $\varphi_{|Y} \not\equiv -\infty$ sur chaque composante connexe de Y. Alors, si K est un compact de Y, on a :*

$$c_K(\varphi_{|Y}) \leqslant c_K(\varphi).$$

Démonstration. — Par la proposition 8.3, il suffit de montrer le résultat dans le cas où $K = \{y\}$ est un point. On se ramène donc facilement au cas où X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On se donne alors $c < c_y(\varphi_{|Y})$. Il existe donc une boule $B(y,r)$ telle que $\int_{B\cap Y} e^{-2c\varphi} dV_Y < +\infty$. Par le théorème d'Ohsawa-Takegoshi appliqué à l'ouvert pseudoconvexe borné B, la sous-variété Y et la fonction $f \equiv 1$ sur Y, il existe F holomorphe sur B telle que $F(z) = 1$ sur $B \cap Y$ et $\int_B |F|^2 e^{-2c\varphi} dV_B < +\infty$. Comme $F(y) = 1$ et F continue, il existe un voisinage V de y dans B tel que sur V, on ait $|F(z)| \geqslant 1/2$. Ceci montre que $\int_V e^{-2c\varphi} dV_B < +\infty$, donc $c \leqslant c_y(\varphi)$. □

Remarque 13.
En termes plus parlants, la singularité d'une fonction psh ne peut qu'augmenter lorsqu'on la restreint à une sous-variété.

En fait, la proposition 13.1 est un cas particulier du théorème suivant, dit de restriction des idéaux multiplicateurs, et dont la démonstration est quasi-identique à celle de la proposition 13.1 :

Théorème 13.2. — *Soit X une variété complexe, $Y \subset X$ une sous-variété lisse, φ une fonction psh sur X telle que $\varphi_{|Y} \not\equiv -\infty$ sur chaque composante connexe de Y :*

$$\mathscr{I}(\varphi_{|Y}) \subset \mathscr{I}(\varphi) \cdot \mathcal{O}_Y$$

Le résultat suivant est une sorte de réciproque de l'inégalité précédente, au sens où on cherche à contrôler la singularité en restriction à une hypersurface par la singularité globale. Malheureusement, le cadre des fonctions psh est trop large pour pouvoir espérer un résultat général, et il faut se restreindre à certaines fonctions psh plus régulières au sens où elles ont un bon comportement local. C'est l'objet de la définition suivante :

Définition 13.3. — Soit X une variété complexe, on dit qu'une fonction psh sur X est hölderienne psh si e^{φ} est localement hölderienne sur X, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset X$, il existe des constantes $C = C_K \geqslant 0, \alpha = \alpha_K > 0$ telle que :

$$\forall x, y \in K, \quad |e^{\varphi(x)} - e^{\varphi(y)}| \leqslant C d(x,y)^{\alpha},$$

où d est une métrique riemannienne sur X.

De telles fonctions sont cependant fréquentes, car elles incluent toute la classe des fonctions du type

$$\max_i \log \left(\sum_j \prod_k |f_{i,j,k}|^{\alpha_{i,j,k}} \right)$$

où $f_{i,j,k} \in \mathcal{O}_X(X)$ et $\alpha_{i,j,k} > 0$.

Le résultat suivant, connu sous le nom d'inversion de l'adjonction, est important particulièrement en géométrie algébrique complexe où il admet une reformulation très simple dans le langage des paires. Nous ne donnons pas sa démonstration ici (elle figure par exemple dans [**DK01**]) car dans la section suivante consacrée aux idéaux adjoints, nous donnons un résultat proche et dont la démonstration utilise entre autres les mêmes idées.

Théorème 13.4. — *Soit H une hypersurface lisse de X et T un courant positif de type $(1,1)$ sur X tel que ses potentiels locaux φ soient des fonctions hölderiennes psh avec $\varphi_{|H} \neq -\infty$. On pose alors dans ce cas $T_{|H} = dd^c\varphi_{|H}$. Alors pour tout compact $K \subset H$, on a*

$$c_K([H] + T) \geqslant 1 \Longleftrightarrow c_K(T_{|H}) \geqslant 1.$$

13.2. Idéal adjoint associé à une fonction psh. — L'idéal adjoint est un idéal qui va nous servir à réaliser exactement $\mathscr{I}(\varphi_{|Y})$ dans $\mathscr{I}(\varphi) \cdot \mathcal{O}_Y$, pour Y une sous-variété de X. Actuellement, nous n'arrivons à des résultats intéressants que dans le cas où Y est une hypersurface. Cependant, il nous semble plus naturel -dans l'optique d'une généralisation à la codimension quelconque- de définir l'idéal adjoint par rapport à un diviseur à croisements normaux simples.

Le cadre est donc celui d'une variété complexe X et d'un diviseur $D = \sum D_i$ à croisements normaux simples -on identifiera donc D à son support. Alors en tout point $x \in X$, il existe un voisinage U_x de x, un entier p et des coordonnées $z_1, \dots z_n$ telles que $D \cap U_x = \{(z_1, \dots, z_n) \in U_x ; z_1 \cdots z_p = 0\}$. Alors on a évidemment dans ces coordonnées :

$$U_x \smallsetminus D \simeq (\Delta^*)^p \times \Delta^{n-p},$$

où Δ désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, et Δ^* ce même disque, épointé. Si $x \notin D$, alors on a $p = 0$.

L'objet fondamental est décrit dans la définition suivante :

Définition 13.5. — Soient X une variété complexe de dimension n, $D = \sum D_i$ un diviseur à croisements normaux simples sur X, et $X_0 = X \smallsetminus D$. On dit qu'une métrique ω_P sur X_0 est D-Poincaré si pour tout ouvert suffisamment petit $U \subset X$ tel que pour des coordonnées $z_1, \dots, z_n$ $U \cap D = \{(z_1, \dots, z_n) \in U ; z_1 \cdots z_p = 0\}$, ω_P est de la forme :

$$\omega_P = \frac{i}{2} \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{|z_i|^2 \log^2 |z_i|} + \sum_{i=p+1}^{n} dz_i \wedge d\bar{z}_i \right).$$

La forme volume associée, $\frac{\omega_P^n}{n!}$, qu'on notera Ω_P, est alors dite D-Poincaré. On a donc localement :

$$\Omega_P = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{|z_i|^2 \log^2 |z_i|} \ \mathrm{Leb}\,,$$

et ainsi la densité de Ω_P est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Une chose importante à vérifier est que de telles métriques existent toujours : c'est en fait chose facile car on sait les construire localement, et il suffit d'utiliser des partitions de l'unité pour les définir globalement.
L'importance de ces métriques réside (entre autres, bien sûr) dans le fait que pour un ouvert suffisamment petit $U \subset X$, en notant $U_0 = U \cap X_0$, on a que (U_0, ω_P) est kählerienne complète.

Définition 13.6. — Soit φ une fonction psh sur une variété pseudoconvexe X, D un diviseur à croisements normaux simples tel que $\varphi_{|D} \not\equiv -\infty$. On définit le faisceau d'idéaux $\mathcal{A}dj^0_D(\varphi)$ comme celui étant formé des germes $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ telles que $|f|^2 e^{-2\varphi}$ soit intégrable par rapport une forme volume D-Poincaré près de x.

Remarque 14.
Cette définition ne dépend pas de la forme volume D-Poincaré choisie.

Remarque 15.
On a donc toujours $\mathcal{A}dj_D^0(\varphi) \subset \mathscr{I}(\varphi)$, et si $x \notin D$, alors $\mathcal{A}dj_D^0(\varphi)_x = \mathscr{I}(\varphi)_x$.

Le résultat suivant, qui permet de dire que l'outil introduit est raisonnable au sens de la géométrie analytique, se prouve de manière très semblable au théorème de Nadel sur la cohérence des idéaux multiplicateurs :

Proposition 13.7. — *Pour toute fonction psh φ sur un ouvert $\Omega \subset X$ et tout diviseur D snc sur X tel que $\varphi_{|D} \not\equiv -\infty$, le faisceau $\mathcal{A}dj_D^0(\varphi)$ est un faisceau cohérent d'idéaux.*

Démonstration. — Pour simplifier les notations, on note $\mathscr{A} := \mathcal{A}dj_D^0(\varphi)$ faisceau sur Ω.
Le résultat étant de nature purement locale, on peut supposer que Ω est la boule $B(0, \frac{1}{2})$ de $\mathbb{C}^n$ et que $D = \{(z_1, \dots, z_n) \in \Omega \,|\, z_1 \cdots z_p = 0\}$, on fixe alors $\Omega_p = \prod_{i=1}^p \frac{1}{|z_i|^2 \log^2 |z_i|}$ Leb la forme de Poincaré canonique sur Ω. On note $\mathcal{H}(\Omega, \varphi)$ désigne l'ensemble des fonctions f holomorphes sur Ω telles que $\int_\Omega |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} \Omega_P(z) < +\infty$. Par la propriété noethérienne forte des faisceaux cohérents, l'ensemble $\mathcal{H}(\Omega, \varphi)$ engendre un faisceau d'idéaux cohérents $\mathscr{J} \subset \mathcal{O}_\Omega$. Clairement, $\mathscr{J} \subset \mathscr{A}$. Pour montrer la réciproque, nous allons vérifier que pour tout $x \in \Omega$ et tout entier s, on a l'égalité $\mathscr{J}_x + \mathscr{A}_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1} = \mathscr{A}_x$. Le lemme de Krull garantit alors que l'intersection sur tous les entiers s du terme de gauche vaut $\mathscr{J}_x$, ce qui conclura.
Pour ce faire, on part donc d'un germe $f_x \in \mathscr{A}_x$ défini sur un voisinage V de x, puis on choisit χ une fonction tronquante à support dans V valant identiquement 1 près de x. Comme $\bar\partial(\chi f) = (\bar\partial \chi) f$ est L^2 par rapport à $e^{-2\varphi}\Omega_P$, on peut appliquer les estimées de Hörmander sur la variété kählerienne $(\Omega \smallsetminus D, \omega_P)$ avec le fibré trivial $(\Omega \smallsetminus D) \times \mathbb{C}$ et le poids strictement psh (grâce au $|z|^2$)

$$\tilde\varphi(z) = \varphi(z) + (n+s) \log|z - x| + |z|^2$$

et on trouve alors une fonction u sur $\Omega \smallsetminus D$ vérifiant $\bar\partial u = \bar\partial(\chi f)$ telle que

$$\int_{\Omega \smallsetminus D} \frac{|u|^2 e^{-2\varphi}}{|z-x|^{2(n+s)}} \Omega_P(z) < +\infty.$$

Alors, par construction, $F = \chi f - u$ est holomorphe sur $\Omega \smallsetminus D$ et s'étend à Ω tout entier : en effet, il suffit de voir que F est holomorphe en les variables $z_1, \dots, z_p$. On le fait pour z_1, en posant $z' = (z_2, \dots, z_n)$; en écrivant le développement en série de Laurent $F(z_1, z') = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z') z_1^n$. Comme l'intégrale $\int_{\Omega \smallsetminus D} |F|^2 e^{-2\varphi} \Omega_P$ converge, il en est de même que $\int_{\Omega \smallsetminus D} |F|^2 \Omega_P$, et donc par le théorème de Fubini, l'intégrale $\int_{B_{\mathbb{C}}(0,\epsilon) \smallsetminus \{0\}} \frac{|F|^2}{|z_1|^2 \log^2 |z_1|} dV(z_1)$ converge aussi.
Alors, on a grâce à la formule de Parseval :

$$\int_{B_{\mathbb{C}}(0,\epsilon) \smallsetminus \{0\}} \frac{|F|^2}{|z_1|^2 \log^2 |z_1|} dV(z_1) = C \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n(z')|^2 \int_{B(0,1)} \frac{|z_1|^{2(n-1)}}{\log^2 |z_1|} dV(z_1)$$

et donc nécessairement, on a : $\forall n \leqslant -1, a_n(z') = 0$, ce qui montre que $F(\cdot\,, z')$ se prolonge holomorphiquement en 0.

Ainsi, $F \in \mathcal{H}(\Omega, \varphi)$ et aussi, comme φ est bornée supérieurement près de x, $f_x - F_x = u_x \in \mathscr{A}_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$, d'où le résultat. □

Remarque 16.
Soit E un fibré en droites sur X muni d'une métrique singulière h *à courbure semi-positive*, et D un diviseur snc sur X tel que $h_{|D} \not\equiv +\infty$. Si φ est le poids (psh) représentant la métrique h sur un ouvert $\Omega \subset X$, alors le faisceau $\mathcal{A}dj_D^0(\varphi)$ est indépendant du choix de la trivialisation ; il est donc la restriction à Ω d'un faisceau cohérent global sur X que nous noterons indifféremment $\mathcal{A}dj_D^0(h) = \mathcal{A}dj_D^0(\varphi)$. Nous y reviendrons.

Il se trouve que le faisceau $\mathcal{A}dj_D^0(\varphi)$ n'est pas le bon objet à regarder, au sens où ce n'est pas l'analogue de l'idéal adjoint algébrique défini dans un cadre très général dans [**Tak07**] ; en effet, ces idéaux ne coïncident pas lorsque φ est à singularités analytiques, et de plus, la suite exacte fondamentale vérifiée par l'adjoint algébrique ne l'est plus par l'idéal que nous avons introduit (on renvoie à la partie d'exemples et contre-exemples pour plus de précisions).
L'idée est de prendre un régularisé à droite de cet idéal : plus précisément, on sait que sur une variété complexe X, une suite croissante de faisceaux d'idéaux cohérents est stationnaire sur tout ouvert relativement compact de X à cause de la cohérence de $\mathcal{O}_X$. Ainsi, pour $\Omega \Subset X$, il existe $\epsilon_{\varphi,\Omega} > 0$ tel que pour $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_{\varphi,\Omega}$, on ait : $\mathcal{A}dj_D^0((1+\epsilon)\varphi)_{|\Omega} = \mathcal{A}dj_D^0((1+\epsilon_{\varphi\Omega})\varphi)_{|\Omega}$.

Définition 13.8. — Avec les notations précédentes et celles de la définition 13.6, on définit le faisceau d'idéaux adjoint $\mathcal{A}dj_D(\varphi)$ par :

$$\mathcal{A}dj_D(\varphi) = \varinjlim_{\epsilon > 0} \mathcal{A}dj_D^0((1+\epsilon)\varphi).$$

En termes analytiques, on peut paraphraser la définition en disant que le faisceau d'idéaux $\mathcal{A}dj_D(\varphi)$ est formé des germes $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ tels que pour $\epsilon > 0$ assez petit, $|f|^2 e^{-2(1+\epsilon)\varphi}$ soit intégrable par rapport à une forme volume D-Poincaré près de x.

La cohérence d'un faisceau se vérifiant localement, la proposition suivante est donc un corollaire immédiat de la proposition 13.7 :

Proposition 13.9. — *Pour toute fonction psh φ sur un ouvert $\Omega \subset X$ et tout diviseur snc D sur X, le faisceau $\mathcal{A}dj_D(\varphi)$ est un faisceau cohérent d'idéaux.*

De même qu'à la remarque 16, on définira pour (E, h) un fibré en droites le faisceau cohérent $\mathcal{A}dj_D(h) = \mathcal{A}dj_D(\varphi)$.

13.3. Comparaison des idéaux adjoints algébriques et analytiques. — Nous allons maintenant montrer que le faisceau d'idéaux $\mathcal{A}dj_D(\varphi)$ généralise bien le faisceau d'idéaux adjoint usuel, au sens où il coïncide avec ce dernier dans le cas où φ est à singularités analytiques, et vérifie aussi la suite exacte fondamentale d'adjonction. On rappelle donc la définition suivante :

Définition 13.10. — Soit $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux non nul sur une variété complexe X, $c > 0$ un nombre réel, et D un diviseur sur X tel que $\mathfrak{a}$ ne soit pas inclus dans l'idéal $\mathscr{I}_D$ de D. On fixe $\mu : \widetilde{X} \to X$ une log-résolution de $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-F)$ soit tel que $F + \mu^* D + K_{\widetilde{X}/X} + \mathrm{Exc}(\mu)$

soit un diviseur à croisements normaux simples. Alors l'idéal adjoint $\mathrm{Adj}(\mathfrak{a}^c, D)$ associé à c et $\mathfrak{a}$ est défini par :

$$\mathrm{Adj}(\mathfrak{a}^c, D) = \mu_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(K_{\widetilde{X}/X} - [c \cdot F] - \mu^* D + D')$$

où $K_{\widetilde{X}/X} = K_{\widetilde{X}} - \mu^* K_X$, $[\ ]$ désigne la partie entière d'un diviseur, et D' désigne le transformé strict de D, au sens où $(\sum a_i D_i)' := \sum a_i D_i'$.

Remarque 17.
Pour obtenir une telle résolution, il suffit de composer une log-résolution $(\mu', X', \mathcal{O}_{X'}(-F'))$ de $\mathfrak{a}$ avec une log-résolution de $F' + \mu'^* D$.
D'autre part, on vérifie que le faisceau défini ne dépend pas d'une telle log-résolution.

Alors, on a la suite exacte suivante fondamentale, dite d'adjonction, donnée dans [**Laz04**], thm 9.5.1 :

Théorème 13.11. — *Avec les notations précédentes, et dans le cas où $D = H$ est une hypersurface non singulière de X, on a la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}(\mathfrak{a}^c) \otimes \mathcal{O}_X(-H) \longrightarrow \mathrm{Adj}(\mathfrak{a}^c, H) \longrightarrow \mathscr{I}((\mathfrak{a}^c)_{|H}) \longrightarrow 0$$

Il s'agit donc maintenant de vérifier que ces résultats s'étendent bien au cadre analytique avec le faisceau $\mathcal{A}dj_D(\varphi)$ (ou $\mathcal{A}dj_H(\varphi)$).

On commence donc à étudier le cas où φ est à singularités analytiques :

$$\varphi \sim \frac{c}{2} \log(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2)$$

au voisinage des pôles. On note $\mathfrak{a}$ la clôture intégrale de l'idéal défini pas les f_i, fonctions que l'on peut choisir générateurs de $\mathfrak{a}$. On se donne de plus $D = \sum_{i=1}^p D_i$ un diviseur snc sur X.
Alors il existe $\mu : X' \to X$, et des diviseurs $E_1, \ldots, E_m$ tels que $\mu^* \mathfrak{a} = \mathcal{O}_{X'}(F)$ où $F = \sum_{j=p+1}^m a_j E_j$ est tel que $F + \mu^* D + K_{X'/X} + \mathrm{Exc}(\mu)$ est à croisements normaux, et vérifie pour tout $j \geqslant p+1, a_j > 0$ (on posera pour $j \in \{1, \ldots, p\}, a_j = 0$). De plus, pour $i \in \{1, \ldots, p\}, E_i$ désigne le transformé strict de D_i (il est possible de les choisir ainsi car $D = \sum D_i$ est à croisement normaux, donc $\sum D_i'$ aussi. En résumé, on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu^* \mathfrak{a} &= \sum_{j=p+1}^m a_j E_j \\ \mu^* D_i &= E_i + \sum_{j=p+1}^m b_{i,j} E_j \\ K_{X'} &= \mu^* K_X + \sum_{j=1}^m c_j E_j \end{aligned}$$

On choisit $x \in X$, qu'on prendra égal à 0 dans une carte. Alors, quitte à changer l'entier p -les notations sont suffisamment compliquées-, on peut supposer que $x \in \mathrm{Supp}(D_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Supp}(D_p)$. On choisit alors des générateurs locaux $x_1, \ldots, x_p$ de $\mathcal{O}_X(-D_1), \ldots, \mathcal{O}_X(-D_p)$ respectivement. De même, on choisit z_k générateur local de $\mathcal{O}_{X'}(-E_k)$.

Alors, si f est un germe de fonction holomorphe près de x, défini sur un voisinage U de 0 suffisamment petit, il nous faut calculer l'expression suivante :

$$\int_U \frac{|f|^2 e^{-2(1+\epsilon)\varphi}}{\prod_{k=1}^p |x_k|^2 \log^2 |x_k|} dV = \int_{U'=\mu^{-1}(U)} \frac{|f\circ\mu|^2 e^{-2(1+\epsilon)\varphi\circ\mu}}{\prod_{k=1}^p |x_k\circ\mu|^2 \log^2 |x_k\circ\mu|} |J_\mu|^2 \, dV'$$

Par le théorème de Parseval, on sait que si une fonction f est telle que l'intégrale de droite est finie, alors c'est aussi le cas pour chacun des monômes qui compose f. On se ramène ainsi à $f\circ\mu = \prod z_j^{d_j}$. Ainsi, l'intégrale de droite vaut, à une constante multiplicative non nulle près (on peut supposer que U' est inclus dans un polydisque $D(0,R)$ avec $R<1$) :

$$\int_{U'} \frac{\prod_{k=1}^m |z_k|^{2(c_k+d_k-(1+\epsilon)ca_k)}}{\prod_{k=1}^p \left[|z_k|^2 \log^2(|z_k| \prod_{j>p} |z_j|^{b_{k,j}})\right] \cdot \prod_{k>p} |z_k|^{2e_k}} dV'$$

où l'on a posé, pour $k>p$, $e_k = \sum_{i=1}^p b_{i,k}$. On prolonge cette notation en posant, pour $k \in \{1,\dots,p\}, e_k = 1$. L'intégrale précédente se réécrit donc :

$$\int_{U'} \frac{\prod_{k=1}^m |z_k|^{2(c_k+d_k-e_k-(1+\epsilon)ca_k)}}{\prod_{k=1}^p \log^2(|z_k| \prod_{j=1}^m |z_j|^{b_{k,j}})} dV'$$

En posant $\lambda_k(\epsilon) = 2(c_k+d_k-e_k-(1+\epsilon)ca_k)+1$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$, on se ramène après un changement de variable en polaires à la convergence de l'intégrale sur un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}_+^m$ à l'intégrale

$$I(\epsilon) = \int_V \frac{\prod_{k=1}^m x_k^{\lambda_k(\epsilon)}}{\prod_{k=1}^p \log^2(x_k \prod_{b_{k,j}>0} x_j)} dx_1 \dots dx_m$$

où V est inclus dans une boule $B(0,r)$ avec $r<1$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 13.12. — *Il existe $0<\epsilon' \leqslant \epsilon$ tel que l'intégrale $I(\epsilon')$ converge si et seulement si pour tout $k \in \{1,\dots,m\}$, on a $\lambda_k(\epsilon) \geqslant -1$.*

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire par le critère de Bertrand.
Réciproquement, on suppose que pour tout k, on a $\lambda_k(\epsilon) \geqslant -1$. Alors, comme pour tout $k>p$, on a $a_k>0$, on aura pour tout $0<\epsilon'<\epsilon$ l'inégalité : $\lambda_k(\epsilon') > -1$. On va alors utiliser l'identité

$$\int_{]0,\delta[^2} \frac{x^a y^{-1}}{\log^2(xy)} dy dx = \int_0^\delta \frac{x^a}{-\log(\delta x)} dx = -\delta^{1-a} \int_0^{\delta^2} \frac{x^a}{\log x} dx$$

dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned} I(\epsilon') &= \int_V \frac{\prod_{k=1}^m x_k^{\lambda_k(\epsilon')}}{\prod_{k=1}^p \log^2(x_k \prod_{b_{k,j}>0} x_j)} dx_1 \dots dx_m \\ &\leqslant \int_V \frac{\prod_{k=1}^p x_k^{-1} \prod_{k>p} x_k^{\lambda_k(\epsilon')}}{\prod_{k=1}^p \log^2(x_k \prod_{b_{k,j}>0} x_j)} dx_1 \dots dx_m \\ &\leqslant C \int_{V'} \frac{\prod_{k>p} x_k^{\lambda_k(\epsilon')}}{\prod_{k=1}^p \log(\prod_{b_{k,j}>0} x_j)} dx_{p+1} \dots dx_m \\ &< +\infty \end{aligned}$$

où V' est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_+^{m-p}$. □

D'autre part, on sait déjà que pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, on a $\lambda_k(\epsilon) = 2(c_k + d_k - 1) + 1 = 2(c_k + d_k) - 1 \geqslant -1$. Reste à voir la condition pour $k > p$: elle est équivalente à

$$c_k + d_k \geqslant e_k + [(1+\epsilon)ca_k].$$

Or, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, on a $[(1+\epsilon)x] = [x]$ pour $\epsilon > 0$ assez petit, et plus précisément pour $\epsilon < ([x]+1)/x - 1$.
Finalement, en mettant ensemble tous ces résultats, on a montré que $f \in \mathcal{A}dj_D(\varphi)$ si et seulement si pour tout k, on a $d_k \geqslant -(c_k - [ca_k] - e_k)$. En se souvenant que $\mu^*D - D' = \sum_{k>p} e_k E_k$, la condition se réécrit encore : $f \in \mu_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(K_{\widetilde{X}/X} - [c \cdot F] - \mu^*D + D')$.

Proposition 13.13. — *Avec les notations précédentes, et en posant $\varphi = c \log(|f_1| + \dots + |f_r|)$ pour $(f_1, \dots, f_r)$ des générateurs de $\mathfrak{a}$, on a l'égalité de faisceaux :*

$$\mathcal{A}dj_D(\varphi) = \mathrm{Adj}(\mathfrak{a}^c, D).$$

Il s'agit maintenant de passer à la suite exacte d'adjonction.
Pour se faire, il nous faut à nouveau introduire, à partir du faisceau d'idéaux multiplicateurs $\mathscr{I}(\varphi)$, un nouveau faisceau, déjà étudié dans [**DEL00**] :

Définition 13.14. — Soit X une variété complexe, et φ une fonction psh sur X. Alors on définit

$$\mathscr{I}_+(\varphi) = \bigcup_{\epsilon>0} \mathscr{I}((1+\epsilon)\varphi)$$

Remarque 18.
De même que pour l'idéal adjoint, pour tout ouvert $\Omega \Subset X$, il existe $\epsilon_{\varphi,\Omega} > 0$ tel que pour $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_{\varphi,\Omega}$, on ait $\mathscr{I}_+(\varphi)_{|\Omega} = \mathscr{I}((1+\epsilon)\varphi)_{|\Omega} = \mathscr{I}((1+\epsilon_{\varphi,\Omega})\varphi)_{|\Omega}$.

Alors, la célèbre conjecture d'ouverture formulée dans [**DK01**] admet une généralisation naturelle en terme d'idéaux multiplicateurs régularisés :

***Conjecture 13.15* (Conjecture d'ouverture forte)**. — *Soit φ une fonction plurisousharmonique sur une variété complexe X, alors on a l'égalité de faisceaux :*

$$\mathscr{I}_+(\varphi) = \mathscr{I}(\varphi).$$

Pour établir la suite exacte d'adjonction dans le cadre analytique, on va utiliser de manière essentielle la preuve du théorème d'inversion de l'adjonction, qu'on peut trouver par exemple dans [**DK01**]. Il y a en effet deux difficultés : la première est la définition même de la flèche de droite, qui correspond à un résultat de restriction ; la seconde est de montrer la surjectivité de cette même flèche, qui est une conséquence du difficile théorème d'Ohsawa-Takegoshi-Manivel, donné au théorème 6.4 :

Mais avant de passer à l'énoncé et la preuve de la suite exacte d'adjonction, on donne un lemme qui nous sera utile à deux reprises :

Lemme 13.16. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ relativement compact dans le polydisque unité, φ une fonction psh sur Ω telle que pour tout $z \in \Omega, \varphi(z) \leqslant -1$, f holomorphe sur Ω, et $\alpha > 0$ un réel. S'il existe $\epsilon > 0$ tel que l'intégrale $\int_\Omega \frac{|f|^2 e^{-2(1+\epsilon)\varphi}}{(-\varphi)^\alpha} dV_\Omega$ converge, alors il existe $\epsilon' > 0$ tel que l'intégrale $\int_\Omega |f|^2 e^{-2(1+\epsilon')\varphi} dV_\Omega$ converge.*
En particulier, si l'intégrale $\int_\Omega \frac{|f|^2 e^{-2(1+\epsilon)\varphi}}{\log^2 |z_n|} dV_\Omega$ converge, alors il en est de même de $\int_{\Omega'} |f|^2 e^{-2(1+\epsilon')\varphi} dV_\Omega$ pour un certain $\epsilon' > 0$ et tout Ω' relativement compact dans Ω.

Démonstration. — On note $C = \inf\{e^{\epsilon x}/x^\alpha ; x \geqslant 1\}$, c'est bien un nombre réel > 0. Alors, l'inégalité $\int_\Omega \frac{|f|^2 e^{-2(1+\epsilon)\varphi}}{(-\varphi)^\alpha} dV_\Omega \geqslant C \int_\Omega |f|^2 e^{-2(1+\epsilon/2)\varphi} dV_\Omega$ montre le premier point.
Quant au deuxième, on note $A = \{z \in \Omega; \varphi(z) \leqslant \frac{1}{4} \log |z_n|\}$ et $B = \{z \in \Omega; \varphi(z) \geqslant \frac{1}{4} \log |z_n|\}$. Alors

$$\int_A \frac{|f|^2 e^{-2(1+\epsilon)\varphi}}{\log^2 |z_n|} dV_\Omega \geqslant \int_A \frac{|f|^2 e^{-2(1+\epsilon)\varphi}}{16\,\varphi^2} dV_\Omega$$

et par la première partie, ceci implique que $\int_A |f|^2 e^{-2(1+\epsilon')\varphi} dV_\Omega$ est finie, pour un certain $\epsilon' > 0$.
D'autre part, si en prenant $\delta = \min(\epsilon', 1)$, on a l'inégalité valable sur B : $-2(1+\delta)\varphi \leqslant -(1+\delta)/2 \log |z_n|$, et donc :

$$\int_{B \cap \Omega'} |f|^2 e^{-2(1+\delta)\varphi} dV_\Omega \leqslant ||f||_{L^\infty(\Omega')} \int_\Omega |z_n|^{-\frac{1+\delta}{2}} dV_\Omega < +\infty$$

ce qui conclut la preuve. □

On est maintenant en mesure de prouver le résultat suivant :

Théorème 13.17. — *Soit X une variété complexe, $H \subset X$ une hypersurface lisse, φ une fonction psh sur X, $\varphi_{|H} \not\equiv -\infty$, telle que e^φ soit localement höldérienne, $i : H \hookrightarrow X$ l'inclusion. Alors la flèche naturelle de restriction induit la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_+(\varphi) \otimes \mathcal{O}_X(-H) \longrightarrow \mathcal{A}dj_H(\varphi) \longrightarrow i_* \mathscr{I}_+(\varphi_{|H}) \longrightarrow 0$$

Démonstration. — Les choses à vérifier sont la définition de la flèche de restriction, sa surjectivité, et l'exactitude de la suite. On commence naturellement par vérifier que la restriction est licite dans les espaces considérés. Comme tout est local, on peut supposer que H est l'hyperplan $z_n = 0$ dans un polydisque $X = D(0, r), r < 1$ dans $\mathbb{C}^n$. De plus, changer φ en $\varphi - C$ ne change rien aux questions d'intégrabilité, donc comme φ est localement majorée, on peut supposer que $\varphi \leqslant -1$ sur l'ouvert considéré, afin de se placer dans les hypothèses du lemme 13.16.
On part donc de F holomorphe non nulle, définie sur un voisinage U de 0, et vérifiant $F \in \mathcal{A}dj_H(\varphi)(U)$. On écrit alors $F(z) = F(z', z_n) = (F(z', z_n) - F(z', 0)) + F(z', 0)$. Ainsi, comme

F est holomorphe, il existe $C_1 > 0$ tel que $|F(z',0)|^2 \leqslant C_1|z_n|^2 + |F(z)|^2$ et donc $|F(z)|^2 \geqslant |F(z',0)|^2 - C_1|z_n|^2$.
D'autre part, comme e^{φ} est hölderienne, il existe $\alpha \in]0,1]$ et $C_2 > 0$ tels que

$$e^{2\varphi(z)} \leqslant \left(e^{\varphi(z',0)} + C_2|z_n|^{\alpha}\right)^2 \leqslant C_3(e^{2\varphi(z',0)} + |z_n|^{2\alpha})$$

avec $C_3 = 4\max(1, C_2)$. D'où, en posant $f(z') = F(z',0)$, l'inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{|F(z)|^2 e^{-2(1+\epsilon)\varphi(z)}}{|z_n|^2\log^2|z_n|} &\geqslant C_3^{-1}\frac{|F(z)|^2}{\log^2|z_n|}\cdot\frac{1}{|z_n|^2(e^{2\varphi(z',0)}+|z_n|^{2\alpha})^{1+\epsilon}} \\ &\geqslant \frac{C_3^{-1}|f(z')|^2}{|z_n|^2\log^2|z_n|(e^{2\varphi(z',0)}+|z_n|^{2\alpha})^{1+\epsilon}} \\ &\quad -\frac{C_3^{-1}C_1}{\log^2|z_n|(e^{2\varphi(z',0)}+|z_n|^{2\alpha})^{1+\epsilon}}\end{aligned}$$

On suppose que $U = U' \times D(0, r_n)$ (on peut toujours s'y ramener en restreignant U), et on intègre partiellement par rapport à la dernière variable sur une famille de disques $|z_n| < \rho(z')$ avec $\rho(z') = \delta e^{(1+\epsilon)\alpha^{-1}\varphi(z',0)}$ avec $\delta > 0$ suffisamment petit pour que $\rho(z') < r_n$ pour tout $z' \in U'$. Il est possible de trouver un tel δ car φ est localement majorée, donc au besoin, on peut restreindre U.
Le terme tout à droite dans l'inégalité précédente est facile à intégrer partiellement, car $\log^2|z_n| \geqslant \log^2 r > 0$, z_n étant de module $\leqslant r < 1$:

$$\int_{|z_n|<\rho(z')}\frac{C_1}{\log^2|z_n|(e^{2\varphi(z',0)}+|z_n|^{2\alpha})^{1+\epsilon}}dV(z_n) \leqslant C_4\delta^2 e^{(\frac{2}{\alpha}-2)(1+\epsilon)\varphi(z',0)}$$

terme qui est borné car $\alpha \leqslant 1$ et φ est majorée.
Quant au terme restant, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{|z_n|<\rho(z')}\frac{dV(z_n)}{|z_n|^2\log^2|z_n|(e^{2\varphi(z',0)}+|z_n|^{2\alpha})^{1+\epsilon}} &\geqslant C_5\int_{|z_n|<\rho(z')}\frac{e^{-2(1+\epsilon)\varphi(z',0)}dV(z_n)}{|z_n|^2\log^2|z_n|} \\ &\geqslant C_6 e^{-2(1+\epsilon)\varphi(z',0)}\int_0^{\rho(z')}\frac{dt}{t\log^2 t} \\ &= -C_6\frac{e^{-2(1+\epsilon)\varphi(z',0)}}{\log\rho(z')}\end{aligned}$$

Alors, on écrit $\log\rho(z') = \log\delta + (1+\epsilon)\alpha^{-1}\varphi(z',0)$, et on obtient le résultat souhaité grâce au lemme 13.16 (on aurait pu, au lieu d'intégrer, minorer directement $(|z_n|^2\log^2|z_n|)^{-1}$ par $(\rho(z')^2\log^2\rho(z'))^{-1}$).
Pour la surjectivité, il s'agit du théorème d'Ohsawa-Takegoshi énoncé précédemment, appliqué au poids $(1+\epsilon)\varphi$.
Enfin, pour l'exactitude de la suite, si $f \in \mathcal{A}dj_H(\varphi)$ s'annule sur $H \cap U$, alors on peut écrire localement $f = g \cdot z_n$ où g est holomorphe et vérifie sur un ouvert $U' \subset U$:

$$\int_{U'}\frac{|g|^2 e^{-2(1+\epsilon)\varphi}}{\log^2|z_n|}dV < +\infty$$

et en utilisant le lemme 13.16, on conclut que $g \in \mathscr{I}_+(\varphi)(U')$, ce qu'il fallait montrer. $\square$

Remarque 19.
Dans le cas où la fonction φ n'est pas hölderienne psh, la flèche de restriction n'est pas toujours bien définie : sur le polydisque de rayon $\frac{1}{2}$ de $\mathbb{C}^2$, on choisit $f=1$ et $\varphi(z_1,z_2) = \max(-\lambda\log(-\log|z_1|), \log|z_2|)$ avec $0<\lambda<\frac{1}{2}$. C'est bien une fonction psh car $-\log(-x)$ est convexe croissante sur $]-\infty,0[$. On a alors $\varphi(z) \geqslant -\lambda\log(-\log|z_1|)$ donc $\frac{e^{-2\varphi(z)}}{|z_1|^2\log^2|z_1|} \leqslant \frac{1}{|z_1|^2|\log|z_1||^{2(1-\lambda)}}$ qui est intégrable sur le polydisque. En revanche, sur l'hyperplan $z_1=0$, $e^{-2\varphi(z)} = |z_2|^{-2}$ n'est pas intégrable.

Remarque 20.
Dans le cas où φ est à singularités analytiques, on sait que $\mathscr{I}_+(\varphi) = \mathscr{I}(\varphi)$, et que $\mathcal{A}dj_H(\varphi)$ coïncide avec l'idéal adjoint algébrique. De plus, il est clair que φ est hölderienne psh, et ainsi, le théorème 13.17 généralise bien la suite exacte d'adjonction algébrique figurant dans [**Laz04**].

Définition 13.18. — Soit X une variété complexe, et H une hypersurface de X. On se donne une fonction quasi-psh φ non identiquement $-\infty$ sur H, T un courant positif de bidegré $(1,1)$ sur X bien défini sur H, et h une métrique hermitienne singulière d'un certain fibré en droites holomorphe, vérifiant $h_{|H} \not\equiv +\infty$. Alors on définit :

- Si localement, $\varphi = \psi + f$ avec ψ psh et f lisse, alors on pose $\mathcal{A}dj_H(\varphi) := \mathcal{A}\mathrm{dj}_H(\psi)$, qui est bien défini globalement ;
- Si localement $T = S + dd^c\varphi$ où S est lisse, et donc φ quasi-psh, on pose $\mathcal{A}\mathrm{dj}_H(T) := \mathcal{A}dj_H(\varphi)$, qui est bien défini globalement ;
- Si la métrique h a un courant de courbure Θ_h semi-positif, on pose $\mathcal{A}\mathrm{dj}_H(h) := \mathcal{A}\mathrm{dj}_H(\Theta_h)$.

On peut bien sûr faire de même avec les idéaux multiplicateurs à la place des idéaux adjoints. A partir de la suite exacte d'adjonction et du théorème de Nadel, on peut donner un résultat global de prolongement, c'est l'objet du corollaire suivant :

Corollaire 13.19. — *Soit (X,ω) une variété kählerienne faiblement pseudoconvexe, $H\subset X$ une hypersurface lisse, (E,h) un fibré en droites holomorphe hermitien muni d'une métrique singulière h, $h_{|H}\not\equiv+\infty$, de courant de courbure à potentiels locaux φ hölderiens psh, et telle qu'il existe une fonction continue $\eta>0$ vérifiant $i\partial\bar\partial\varphi \geqslant \eta\,\omega$.*
Alors, pour toute toute section $s\in H^0(H,\mathcal{O}_H(K_H+E_H)\otimes\mathscr{I}_+(h_{|H}))$ s'étend en une section $\tilde{s}\in H^0(X,\mathcal{O}_X(K_X+H+E)\otimes\mathcal{A}\mathrm{dj}_H(h))$.

Démonstration. — En tensorisant la suite exacte d'adjonction par K_X+E+H, on obtient :

$$0\longrightarrow\mathscr{I}_+(h)\otimes\mathcal{O}_X(K_X+E)\longrightarrow\mathcal{A}\mathrm{dj}_H(h)\otimes\mathcal{O}_X(K_X+E+H)\longrightarrow i_*\mathscr{I}_+(h_{|H})\otimes\mathcal{O}_H(K_H+E_H)\longrightarrow 0$$

Mais par le théorème de Nadel, on sait que, si T est la courbure de Chern de (E,h) :

$$\begin{aligned} H^1(X,\mathcal{O}_X(K_X+E)\otimes\mathscr{I}_+(h)) &= H^1(X,\mathcal{O}_X(K_X+E)\otimes\mathscr{I}_+(T)) \\ &= H^1(X,\mathcal{O}_X(K_X+E)\otimes\varinjlim_{\epsilon>0}\mathscr{I}((1+\epsilon)T)) \\ &= H^1(X,\varinjlim_{\epsilon>0}(\mathcal{O}_X(K_X+E)\otimes\mathscr{I}((1+\epsilon)T))) \\ &= \varinjlim_{\epsilon>0} H^1(X,\mathcal{O}_X(K_X+E)\otimes\mathscr{I}((1+\epsilon)T)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En effet, on peut choisir une métrique lisse h_∞ sur E, de courbure lisse T_∞, et alors $h^{1+\epsilon}\otimes h_\infty^{-\epsilon}$ est une métrique sur E de courant de courbure $(1+\epsilon)T-\epsilon T_\infty$. Or, pour tout $\epsilon>0, \mathscr{I}(h^{1+\epsilon}\otimes h_\infty^{-\epsilon})=\mathscr{I}((1+\epsilon)T-\epsilon T_\infty)=\mathscr{I}((1+\epsilon)T)$, et par lissité de T_∞, il existe $\epsilon_\infty>0$ tel que pour tout $0<\epsilon<\epsilon_\infty$, on ait $(1+\epsilon)T-\epsilon T_\infty \geqslant \frac{\eta}{2}\omega$. Donc le théorème de Nadel garantit que $H^1(X,\mathcal{O}_X(K_X+E)\otimes\mathscr{I}((1+\epsilon)T))=0$ pour $0<\epsilon<\epsilon_\infty$. Le reste s'ensuit par définition des limites inductives.
L'opération de restriction induit donc une surjection :

$$H^0(X,\mathcal{O}_X(K_X+E+H)\otimes\mathcal{A}\mathrm{dj}_H(h)) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow H^0(H,\mathcal{O}_H(K_H+E_H)\otimes\mathscr{I}_+(h_{|H}))$$

ce qu'il fallait montrer. □

L'approche utilisée pour montrer ce résultat, qui utilise de manière essentielle la version locale du théorème de Manivel, est peut-être la plus naturelle pour obtenir la version globale du théorème de Manivel [Dem01]. Cependant, le résultat que nous obtenons ainsi est une version assez affaiblie du théorème de Manivel au sens où elle est qualitative (on n'a plus de contrôle sur la les normes L^2), et n'est valable que pour des courants assez réguliers (à potentiels hölderiens psh).

13.4. Retour au faisceau $\mathcal{A}dj_H^0(\varphi)$. — Dans cette partie, on va montrer pourquoi le choix initial de $\mathcal{A}dj_H^0(\varphi)$ n'est pas judicieux, puis donner les résultats qui restent vrais avec ce faisceau.

Pour ce faire, on va utiliser une classe de fonctions psh algébriques :

Proposition 13.20. — *Soit $\varphi=\frac{k}{2}\log(\sum_{i=1}^n|z_i|^{2\alpha_i})$, avec α_i des réels strictement positifs, de même que k, et H l'hyperplan $\{z_1=0\}$. Alors le germe en 0 de $\mathcal{A}dj_H^0(\varphi)$ est monomial, engendré par les z^β vérifiant l'une des deux conditions suivantes :*

(i) $\sum\frac{\beta_i+1}{\alpha_i}>k+\frac{1}{\alpha_1}$

(ii) $\sum\frac{\beta_i+1}{\alpha_i}\geqslant k+\frac{1}{\alpha_1}$ *et* $\beta_1>0$.

Démonstration. — Le fait que l'idéal soit monomial est bien classique, on peut par exemple dire qu'on est dans le cas radial pour lequel ce fait est connu.
On va noter $N=\sum\frac{\beta_i+1}{\alpha_i}$.
Quant au calcul de l'idéal, il se ramène, après changement de variables polaire, puis radial, à l'étude

de la convergence, pour $U \subset D(0,\delta)$, $\delta < 1$ (resp. V) voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n_+$) de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_U \frac{\prod_{i=1}^n |z_i|^{2\beta_i}}{|z_1|^2\log^2|z_1|\left(\sum_{i=1}^n |z_i|^{2\alpha_i}\right)^k} dV_{\mathbb{C}^n} &= C\int_V \frac{\prod_{i=1}^n r_i^{2\beta_i+1}}{r_1^2\log^2 r_1\left(\sum_{i=1}^n r_i^{2\alpha_i}\right)^k} dV_{\mathbb{R}^n}\\ &= C'\int_{t=0}^{\delta}\int_{u\in\mathbb{S}^{n-1}_+} \frac{t^{2(N-k-1/\alpha_1)-1}\prod_{i=1}^n u_i^{2(\beta_i+1)/\alpha_i-1}}{u_1^{2/\alpha_1}\log^2(tu_1)} du\, dt\end{aligned}$$

où $\mathbb{S}^{n-1}_+ = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+; x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1\}$.
Pour simplifier le calcul, on introduit les notations suivantes : $r = 2(N-k-1/\alpha_1)-1$, $\lambda_1 = 2\beta_1/\alpha_1 - 1$, et pour $i \geqslant 2$, $\lambda_i = 2(\beta_i+1)/\alpha_i - 1$. On a donc toujours $\lambda_1 \geqslant -1$, et pour $i\geqslant 2$, $\lambda_i > -1$.
Il faut donc étudier l'intégrale :

$$I(r,\underline{\lambda}) = \int_{t=0}^{\delta}\int_{u\in\mathbb{S}^{n-1}_+} \frac{t^r\prod_{i=1}^n u_i^{\lambda_i}}{\log^2(tu_1)} du\, dt$$

On a bien sûr la condition nécessaire de convergence $r\geqslant -1$, équivalente à $N \geqslant k + \frac{1}{\alpha_1}$.

- Supposons qu'on ait $r > -1$. Alors l'intégrale est majorée par

$$\int_{t=0}^{\delta}\int_{u\in[0,1]^n} \frac{t^r\prod_{i=2}^n u_i^{\lambda_i}}{u_1\log^2(tu_1)} du\, dt$$

et en intégrant par rapport u_1, cette dernière intégrale est égale :

$$\int_{t=0}^{\delta}\int_{u\in[0,1]^{n-1}} \frac{t^r\prod_{i=2}^n u_i^{\lambda_i}}{-\log t} du\, dt < +\infty$$

- Supposons maintenant $r\geqslant -1$ et $\lambda_1 > 0$. Alors l'intégrale $I(r,\underline{\lambda})$ est majorée par

$$\int_{t=0}^{\delta}\int_{u\in[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n u_i^{\lambda_i}}{t\log^2(tu_1)} du\, dt$$

qui vaut encore

$$\int_{u\in[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n u_i^{\lambda_i}}{-\log(\delta u_1)} du\, dt < +\infty$$

- Supposons maintenant réciproquement que $I(r,\underline{\lambda})$ soit finie. On a donc $r\geqslant -1$, et il reste donc seulement à montrer que si $r=-1$, alors nécessairement $\lambda_1 > -1$. Or, on a l'égalité

$$I(-1,\underline{\lambda}) = \int_{u\in\mathbb{S}^{n-1}_+} \frac{\prod_{i=1}^n u_i^{\lambda_i}}{-\log(\delta u_1)} du$$

Or, en fixant $\epsilon = \sqrt{3}/2\sqrt{n-1}$, si $u = (u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{S}^{n-1}_+$ vérifie $u_1\in[0,\epsilon]$ et $u_2,\dots,u_{n-1}\in[\epsilon/2,\epsilon]$, alors $x_n\geqslant 1/2$. En effet, $x_n^2 \geqslant 1-(n-1)\epsilon^2 = 1/4$.
Ainsi, on a la minoration :

$$\begin{aligned} I(-1,\underline{\lambda}) &\geqslant \int_{u_1=0}^{\epsilon}\int_{u_2=\epsilon/2}^{\epsilon}\cdots\int_{u_{n-1}=\epsilon/2}^{\epsilon} 2^{-\lambda_n}\frac{\prod_{i=1}^{n-1} u_i^{\lambda_i}}{-\log(\delta u_1)} du_1\cdots du_{n-1}\\ &\geqslant C\int_{u_1=0}^{\delta\epsilon}\frac{u_1^{\lambda_1}}{-\log(u_1)} du_1\end{aligned}$$

où C est une constante > 0. Or, l'intégrale de droite converge si et seulement $\lambda_1 > -1$, ce qui conclut la preuve de la proposition. $\square$

On sait qu'on a toujours l'inclusion $\mathcal{A}dj_H(\varphi) \subset \mathcal{A}dj^0_H(\varphi)$. Alors, grâce à la proposition 13.20, on peut montrer le résultat suivant :

Corollaire 13.21. — *Il existe φ psh sur le polydisque unité de $\mathbb{C}^2$, à singularités algébriques, telle qu'on ait l'inclusion stricte $\mathcal{A}dj_H(\varphi) \subsetneq \mathcal{A}dj^0_H(\varphi)$.*
En particulier, en notant $\mathfrak{a}$ l'idéal associé à φ, on a en général $\mathcal{A}dj^0_H(\varphi) \neq \mathrm{Adj}(\mathfrak{a}, H)$.

Démonstration. — On note D le polydisque unité, et on prend $\varphi(z) = 3\log(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ et $f(z) = z_1^3 z_2^3$. On est dans le cas (ii) de la proposition 13.20, avec égalité dans la première inégalité large, donc on a $\int_D \frac{|f|^2 e^{-2\varphi}}{|z_1|^2 \log^2 |z_1|} dV < +\infty$ mais pour tout $\epsilon > 0$, $\int_D \frac{|f|^2}{|z_1|^2 \log^2 |z_1|} e^{-2(1+\epsilon)\varphi} dV = +\infty$. $\square$

Pour finir, nous aimerions donner quelques résultats concernant l'idéal $\mathcal{A}dj^0_H(\varphi)$.

Le résultat crucial est le lemme suivant, dont les hypothèses sont très restrictives :

Lemme 13.22. — *Soit φ une fonction psh à singularités analytiques ou radiale sur une boule $B \subset \mathbb{C}^n$ centrée en 0, $\varphi < C < 0$ sur B, et enfin f une fonction holomorphe sur B. Si l'intégrale*

$$\int_B |f|^2 \frac{e^{-2\varphi}}{\varphi} dV$$

converge, alors il en est de même pour

$$\int_B |f|^2 e^{-2\varphi} dV.$$

Démonstration. — On commence par le cas où φ est à singularités analytiques. Avec les notations de cette partie, l'hypothèse d'intégrabilité se réécrit :

$$\int_{U'} \frac{\prod |z_j|^{2(c_j + d_j - a_j)}}{\log(\prod |z_j|^{a_j})} dV' < +\infty,$$

puis en faisant un changement de variable polaire, le critère de Bertrand montre que

$$\int_{U'} \prod |z_j|^{2(c_j + d_j - a_j)} dV' < +\infty,$$

ce qu'il fallait montrer.
Passons au cas radial en raisonnant par l'absurde. Avec les notations de l'inégalité (10.1) de la preuve de la proposition 10.2, comme g est concave et croissante en la première variable, on a $g(x, \cdot) = O_{x \to +\infty}(x)$ (on peut même dire plus précisément que soit $g(x, \cdot)$ tend vers 0 en $+\infty$, soit est équivalente à lx avec $l \neq 0$), donc si F désigne l'intégrande dans l'inégalité (10.1), on sait que $F \geqslant 1$ et donc, pour un $A > 0$,

$$\int_{\log r}^{+\infty} \frac{F(t, \cdot)}{g(t, \cdot)} dt \geqslant C \int_A^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty$$

et en particulier, l'intégrale $\int |f|^2 e^{-2\varphi}/\varphi$ diverge. $\square$

En notant $\widetilde{\mathscr{I}(\varphi)}$ le faisceau d'idéaux analogue au faisceau d'idéaux multiplicateurs où la condition d'intégrabilité locale porte sur $\frac{|f|^2e^{-2\varphi}}{\log^2|s|}$, on dispose alors du résultat suivant :

Théorème 13.23. — *Soit φ une fonction hölderienne psh qui soit à singularités analytiques ou localement radiale, et $i : H \hookrightarrow X$ l'inclusion. Alors la flèche naturelle de restriction induit la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathscr{I}(\varphi)} \otimes \mathcal{O}_X(-H) \longrightarrow \mathcal{A}dj_H^0(\varphi) \longrightarrow i_*\mathscr{I}(\varphi_{|H}) \longrightarrow 0$$

Remarque 21.

En particulier, sous ces hypothèses, $\widetilde{\mathscr{I}(\varphi)}$ est un faisceau d'idéaux cohérent.

Démonstration. — La preuve est très semblable à celle de la suite exacte d'adjonction. La seule différence ici va être au niveau de la flèche de restriction, qui n'est a priori pas bien définie.
On prend donc $F \in \mathcal{A}dj_H^0(\varphi)$, et comme précédemment, on a l'inégalité :

$$\begin{aligned}\frac{|F(z)|^2e^{-2\varphi(z)}}{|z_n|^2\log^2|z_n|} &\geqslant C_3^{-1}\frac{|F(z)|^2}{\log^2|z_n|}\cdot\frac{1}{|z_n|^2(e^{2\varphi(z',0)}+|z_n|^{2\alpha})}\\ &\geqslant \frac{C_3^{-1}|f(z')|^2}{|z_n|^2\log^2|z_n|(e^{2\varphi(z',0)}+|z_n|^{2\alpha})}-\frac{C_3^{-1}C_1}{\log^2|z_n|(e^{2\varphi(z',0)}+|z_n|^{2\alpha})}\end{aligned}$$

De même, on suppose que $U = U' \times D(0, r_n)$ et on intègre partiellement par rapport à la dernière variable sur une famille de disques $|z_n| < \rho(z')$ avec $\rho(z') = \epsilon e^{\alpha^{-1}\varphi(z',0)}$ avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\rho(z') < r_n$ pour tout $z' \in U'$.
Le terme tout à droite dans l'inégalité précédente est facile à intégrer partiellement, car $\log^2|z_n| \geqslant \log^2 r > 0$, z_n étant de module $\leqslant r < 1$:

$$\int_{|z_n|<\rho(z')}\frac{C_1}{\log^2|z_n|(e^{2\varphi(z',0)}+|z_n|^{2\alpha})}dV(z_n) \leqslant C_4\epsilon^2e^{(\frac{2}{\alpha}-2)\varphi(z',0)}$$

terme qui est borné car $\alpha \leqslant 1$ et φ est majorée. En revanche, on ne peut pas minorer par une constante le dernier terme de l'inégalité, il faut être plus précis. Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{|z_n|<\rho(z')}\frac{dV(z_n)}{|z_n|^2\log^2|z_n|(e^{2\varphi(z',0)}+|z_n|^{2\alpha})} &\geqslant C_5\int_{|z_n|<\rho(z')}\frac{e^{-2\varphi(z',0)}dV(z_n)}{|z_n|^2\log^2|z_n|}\\ &\geqslant C_6e^{-2\varphi(z',0)}\int_0^{\rho(z')}\frac{dt}{t\log^2 t}\\ &= -C_6\frac{e^{-2\varphi(z',0)}}{\log\rho(z')}\end{aligned}$$

Alors, on écrit $\log\rho(z') = \log\epsilon + \alpha^{-1}\varphi(z',0)$, et on obtient le résultat souhaité en utilisant le lemme 13.22.

Remarque 22.

Ainsi, si on savait démontrer le lemme 13.22 sous l'hypothèse générale φ hölderienne psh, on aurait en toute généralité une suite exacte d'adjonction tordue pour $\mathcal{A}dj_H^0(\varphi)$.

Conclusion : le point de vue valuatif

Finalement, pour étudier les singularités des fonctions psh, on a eu recours au début à des log-résolutions (dans le cas à singularités analytiques), puis on a introduit des objets (idéaux multiplicateurs, idéaux adjoints) qui « lisent » les singularités directement sur la variété grâce à l'outil intégral.

En géométrie algébrique, un tel outil n'est pas disponible, mais les notions d'idéaux multiplicateurs ou d'idéaux adjoints existent bien ; leurs définitions passent toutes par des log-résolutions. Par exemple, si $\mathfrak{a}$ est un idéal, et $c > 0$, alors on choisit une log-résolution $(\widetilde{X}, \mu, \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-F))$ de $\mathfrak{a}$, et on pose $\mathscr{I}(\mathfrak{a}^c) = \mu_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(K_{\widetilde{X}/X} - [c \cdot F])$, idéal sur $\mathcal{O}_X$ qui ne dépend pas de la log-résolution μ. En fait, un peu cachée sous des formes compliquées, l'idée sous-jacente est très simple : on veut comprendre des comportements singuliers de fonctions, ou en changeant de point de vue des ordres d'annulation (penser aux nombres de Lelong par exemple). On se ramène alors birationnellement à une situation simple faisant intervenir seulement le faisceau structural des fonctions holomorphes ; il ne reste plus qu'à calculer ensuite les valuations divisorielles des fonctions en question.

Peut-être peut on faire une petite pause ici, et expliquer plus précisément ce que l'on entend par valuation divisorielle. Tout d'abord, une situation bien connue est celle d'une variété normale (localement $\mathbb{Q}$-factorielle si l'on veut se simplifier la vie avec les ($\mathbb{Q}$-) diviseurs de Cartier et de Weil) : si E est un diviseur premier (une hypersurface intègre en bref), alors, comme X est régulière en codimension 1, l'anneau $\mathcal{O}_{X,\eta}$ au point générique η de E est un anneau de valuation discrète, muni d'une valuation qui s'étant à $K(X)$ le corps de fonctions de X. On note cette valuation ord_E. L'avantage de cette valuation est que c'est un outil très souple : il ne dépend que d'un voisinage du point générique de E, et ainsi, si X_1, X_2 sont deux modèles birationnels de X, avec E_i diviseur premier de X_i, alors on a égalité $\mathrm{ord}_{E_1} = \mathrm{ord}_{E_2}$ des valuations sur $K(X)$ si et seulement s'il existe une application birationnelle $\psi : Y_1 \dashrightarrow Y_2$ qui soit un isomorphisme entre des voisinages des points génériques de E_1 et E_2. Alors, par simplicité, on réferera à la valuation ord_E pour E un certain diviseur dans un certain modèle birationnel de X ; pas plus de précisions ne sont nécessaires comme on vient de le voir ! Pour finir, si $\mathfrak{a}$ est un idéal engendré par $(f_1, \ldots, f_r)$, on notera $\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a}) = \min_i \mathrm{ord}_E(f_i)$.

Revenons à nos moutons (valuatifs). En réalité, le point de vue valuatif s'étend très bien au cadre psh général (et plus seulement aux fonctions psh à singularités analytiques) grâce (entre autres) aux nombres de Lelong généralisés d'une fonction psh le long (sic) des diviseurs de toutes les modifications projectives possibles (au dessus d'un seul point, disons 0). Alors cette dernière donnée (voir [**BFJ08**] pour la théorie générale) caractérise la singularité de la fonction psh en 0. Nous ne voulons pas rentrer dans les détails, donc pour la suite, on va se limiter au cadre des singularités analytiques, mais il est important de garder en tête que ce point de vue est un point de vue général, voire *le* bon point de vue.

Comme nous le disions au début de la partie II, le point de vue naïf qui semble le plus simple est le point de vue L^∞ : on cherche les fonctions f telles que $fe^{-\varphi}$ est bornée, ou encore telles que $\log|f| \leqslant \varphi + O(1)$ (φ est moins singulière que $\log|f|$). Souvenons-nous que nous avons choisi de nous restreindre aux fonctions φ à singularités analytiques, et les questions étant locales, on peut supposer que $\varphi = c\log\sum|f_i|$; on note $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par les (f_i). Alors il est facile de voir que

$$\mathcal{L}^\infty(\mathfrak{a}^c) = \{\mathrm{ord}_E(f) \geqslant c\,\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a});\ \forall E\}$$

Malheureusement, cet objet simple (d'apparence) n'est pas adapté à la géométrie complexe. On se tourne donc vers les méthodes L^2, et par le théorème 8.9 un peu adapté (il faut rajouter une fonction holomorphe devant le $e^{-\varphi}$), l'idéal multiplicateur est donné par

$$\mathcal{L}^2(\mathfrak{a}^c) = \{\mathrm{ord}_E(f) \geqslant c\,\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a}) - a_E(X);\ \forall E\}$$

où $a_E(X)$ est la discrépance de E par rapport à X ; *ie* pour tout morphisme birationnel $\mu : \widetilde{X} \to X$ (avec $\widetilde{X}$ normale), $K_{\widetilde{X}/X} \equiv \sum_E a_E(X)E$; on peut aussi interpréter la discrépance en termes du jacobien J_μ.
Pour finir, on peut encore interpréter l'idéal adjoint (analytique) en termes valuatifs : si on choisit H une hypersurface intègre de X sur laquelle φ n'est pas identiquement $-\infty$, alors l'idéal adjoint est donné de même que l'idéal multiplicateur $\mathcal{L}^2$ en rajoutant une condition d'annulation le long des diviseurs croisant l'hypersurface. En termes précis :

$$\mathcal{L}^2_{\mathrm{adj}}(\mathfrak{a}^c) = \{\mathrm{ord}_E(f) \geqslant c\,\mathrm{ord}_E(\mathfrak{a}) - a_E(X) + \mathrm{ord}_E H;\ \forall E \neq H\}$$

où $\mathrm{ord}_E H$ peut être vu en prenant un voisinage du point générique de E sur lequel H est donnée par une équation $f_H \in K(X)$, et en évaluant $\mathrm{ord}_E(f_H)$.

En conclusion, tous les objets introduits en termes d'intégrales ont des interprétations valuatives unificatrices, suggérant que ce dernier point de vue est efficace pour comprendre les singularités des fonctions psh.

PARTIE V
SEMI-CONTINUITÉ DE L'EXPOSANT DE SINGULARITÉ COMPLEXE

Dans cette partie, nous allons aborder la preuve du théorème fondamental 8.11. La stratégie de preuve est la suivante : on commence par traiter le cas à singularités analytiques grâce à des estimées de volume données par des log-résolutions, tout en gardant à l'esprit que l'on ne pourra pas obtenir la version effective par ces méthodes. Il faudra donc ensuite reprendre ces résultats en s'appuyant de manière essentielle sur le théorème d'Ohsawa-Takegoshi combiné au théorème de Demailly sur l'approximation des fonctions psh par des fonctions psh à singularités analytiques.

14. Sous-additivité de l'exposant de singularité holomorphe

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème 14.2 qui est une étape cruciale dans la démonstration du théorème de semi-continuité de l'exposant de singularité holomorphe, car il permet de donner un contrôle uniforme sur une fonction holomorphe par sa série de Taylor tronquée. Nous avons développé tous les outils dont nous avons besoin pour passer à la preuve, il reste donc à les mettre en place, et c'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 14.1. — *Soient X, Y deux variétés complexes de dimensions respectives n, m, soient $\mathscr{I} \subset \mathcal{O}_X, \mathscr{J} \subset \mathcal{O}_Y$ des faisceaux cohérents d'idéaux, et $K \subset X, L \subset Y$ deux compacts. On définit $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J} := \mathrm{pr}_1^*\mathscr{I} + \mathrm{pr}_2^*\mathscr{J} \subset \mathcal{O}_{X\times Y}$. Alors*

$$c_{K\times L}(\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}) = c_K(\mathscr{I}) + c_L(\mathscr{J}).$$

Démonstration. — Comme d'habitude, on se ramène à $K = \{x\}$ et $L = \{y\}$, et comme tout le problème est local, on peut supposer $X \subset \mathbb{C}^n, Y \subset \mathbb{C}^m$ et $(x, y) = (0, 0)$. Alors, on pose $g = (g_1, \dots, g_p)$ (resp. $h = (h_1, \dots, h_q)$) des systèmes de générateurs de $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{J}$) sur un voisinage de 0. On définit ensuite

$$\varphi = \log \sum |g_i|, \quad \psi = \log \sum |h_j|.$$

Alors $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$ est engendré par le $(p+q)$-uplet de fonctions

$$g \oplus h = (g_1(x), \dots, g_p(x), h_1(y), \dots, h_q(y))$$

et la fonction psh associée est $\Phi(x, y) = \log\left(\sum |g_i(x)| + \sum |h_j(y)|\right)$, qui a le même comportement aux pôles que $\Phi'(x, y) = \max(\varphi(x), \psi(y))$. Plus précisément, on a

$$\Phi'(x, y) \leqslant \Phi(x, y) \leqslant \Phi'(x, y) + \log 2.$$

Alors, si U, V sont de voisinages suffisamment petits de 0, on peut écrire (une fois des métriques hermitiennes fixées sur X et Y) :

$$\mu_{U\times V}(\{\max(\varphi(x), \psi(y)) < \log r\}) = \mu_U(\{\varphi < \log r\}) \cdot \mu_V(\{\psi < \log r\}),$$

et donc le théorème 8.9 nous donne la double inégalité :

$$C_1 r^{2(c+c')} \leqslant \mu_{U\times V}(\{\max(\varphi(x), \psi(y)) < \log r\}) \leqslant C_2 r^{2(c+c')} |\log r|^{n+m-2}$$

avec $c = c_0(\varphi) = c_0(\mathscr{I})$ et $c' = c_0(\psi) = c_0(\mathscr{J})$. Alors, en utilisant la caractérisation de l'exposant de singularité complexe donnée à la proposition 8.2, on obtient immédiatement :

$$c_{(0,0)}(\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}) = c + c' = c_0(\mathscr{I}) + c_0(\mathscr{J}).$$

□

Voilà maintenant le principal résultat de cette partie :

Théorème 14.2. — *Soient f, g des fonctions holomorphes sur une variété complexe X. Alors pour tout $x \in X$, on a*

$$c_x(f+g) \leqslant c_x(f) + c_x(g).$$

Plus généralement, si $\mathscr{I}$ et $\mathscr{J}$ sont des faisceaux cohérents d'idéaux, alors

$$c_x(\mathscr{I} + \mathscr{J}) \leqslant c_x(\mathscr{I}) + c_x(\mathscr{J}).$$

Remarque 23.
On a aussi un tel résultat de sous-additivité pour la multiplicité d'Arnold, mais la preuve consiste seulement en une réécriture de l'inégalité de Hölder, alors que le théorème précédent est vraiment un résultat profond.

Démonstration. — On note Δ la diagonale de $X \times X$. Alors, $\mathscr{I} + \mathscr{J}$ peut être vu comme la restriction à Δ de $\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}$. Combinant les propositions 13.1 et 14.1, on obtient :

$$c_x(\mathscr{I} + \mathscr{J}) = c_x((\mathscr{I} \oplus \mathscr{J})_{|\Delta}) \leqslant c_{(x,x)}(\mathscr{I} \oplus \mathscr{J}) = c_x(\mathscr{I}) + c_x(\mathscr{J}).$$

Comme $(f+g) \subset (f) + (g)$, on a aussi

$$c_x(f+g) \leqslant c_x((f) + (g)) \leqslant c_x(f) + c_x(g).$$

□

Remarque 24.
Le théorème de sous-additivité n'est vrai que dans le cas particulier où le compact K est un point. En effet, si on prend $X = \mathbb{C}, K = \{0, 1\}, f(z) = z, g(z) = 1 - z$, alors $c_K(f+g) = +\infty$ alors que $c_K(f) = c_K(g) = 1$.

15. Semi-continuité dans le cas holomorphe

Dans l'approche du théorème de semi-continuité pour le cadre holomorphe présentée dans [**DK01**], un des points importants est de commencer à obtenir le résultat dans le cadre d'une famille à un paramètre dans $\mathbb{C}^p$. Il s'agit de la proposition suivante :

Proposition 15.1. — *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et $S \subset \mathbb{C}^p$ des ouverts pseudoconvexes bornés. Soit $\varphi(x, s)$ une fonction hölderienne psh sur $\Omega \times S$ et soit $K \subset \Omega$ un compact. Alors*

(*i*) *$s \mapsto c_K(\varphi(\bullet, s))$ est semi-continue pour la topologie usuelle sur S ;*

(ii) Si $s_0 \in S$ et $c < c_K(\varphi(\bullet, s_0))$, alors il existe un voisinage U de K et une borne uniforme

$$\int_U e^{-2c\varphi(x,s)} dV(x) \leqslant M(c)$$

pour s dans un voisinage de s_0.

Démonstration. — La preuve s'appuie de manière essentielle (et astucieuse !) sur le théorème d'Ohsawa-Takegoshi. On va détailler le cas (ii), duquel découle immédiatement le point (i).
Pour commencer, le problème étant de nature locale, on peut restreindre les ouverts Ω, S de telle sorte à ce que e^{φ} soit hölderienne d'exposant α sur l'ouvert $\Omega \times S$, et que l'intégrale $\int_\Omega e^{-2c\varphi(x,s)} dV(x)$ soit convergente.
On fixe un entier k, et on définit

$$\psi_{k,s}(x,t) = 2c\,\varphi(x, s + (kt)^k(s_0 - s)) \quad \text{sur}\, \Omega \times D,$$

où $D \subset \mathbb{C}$ est le disque unité, et $s \in V_k := B_S(s_0, k^{-k} d(s_0, \partial S))$.
Comme $\psi_{k,s}(x, 1/k) = 2c\varphi(x, s_0)$, le théorème d'Ohsawa-Takegoshi appliqué aux domaines bornés $\Omega \times \{\frac{1}{k}\} \subset \Omega \times D$ donne l'existence des fonctions holomorphes $F_{k,s}$ sur $\Omega \times D$ pour $s \in V_k$ telles que $F_{k,s}(x, 1/k) = 1$ et

$$\int_{\Omega \times D} |F_{k,s}(x,t)|^2 e^{-\psi_{k,s}(x,t)} dV(x) dV(t) \leqslant C_1 \tag{15.1}$$

avec $C_1 > 0$ constante indépendante de k et de $s \in V_k$.
Comme les restrictions faites au début impliquent que φ est majorée, il en est donc de même de la famille $(\psi_{k,s})_{(k,s) \in W}$, où $W = \{(k,s) \in \mathbb{N}^* \times S; s \in V_k\}$. Alors l'inégalité précédente montre que la famille $(F_{k,s})_{(k,s)\in W}$ est bornée au sens L^2, donc c'est une famille normale. Quitte à prendre un ouvert relativement compact de $\Omega \times D$, on peut supposer que $(F_{k,s})_{(k,s)\in W}$ est bornée. Alors, par les inégalités de Cauchy, $|F_{k,s}(u) - F_{k,s}(v)| \leqslant \sup_{i,B} \left|\frac{\partial F_{k,s}}{\partial z_i}\right| ||u - v|| \leqslant C ||F_{k,s}||_{L^\infty(\Omega \times D)} ||u - v||$, donc la famille $(F_{k,s})_{(k,s)\in W}$ est équicontinue.
Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tous $x, x' \in \Omega$ et tous $t, t' \in D$, on ait

$$(||(x', t') - (x,t)|| \leqslant \epsilon) \Longrightarrow \forall (k,s) \in W, |F_{k,s}(x',t') - F_{k,s}(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

En appliquant ceci à $t' = 1/k$ pour $k \geqslant \epsilon$, alors on a pour tout $(x,t) \in \Omega \times D(0,\epsilon)$, $|F_{k,s}(x,t)| \geqslant 1/2$.
Alors, dans l'intégrale (15.1) restreinte à $\Omega \times D(0,\epsilon)$, on réalise le changement de variables $t = k^{-1}\tau^{1/k}$, de jacobien $k^{-4}|\tau|^{-2(1-1/k)}$, ce qui nous donne l'inégalité, pour $k \geqslant \epsilon^{-1}$,

$$\int_{\Omega \times D(0,(k\epsilon)^k)} \frac{e^{-2c\varphi(x, s+\tau(s_0-s))}}{|\tau|^{2(1-1/k)}} dV(x) dV(\tau) \leqslant 4k^4 C_1.$$

D'autre part, le caractère hölderien de e^{φ} montre qu'on a l'inégalité

$$e^{\varphi(x, s+\tau(s_0-s))} \leqslant e^{\varphi(x,s)} + C|\tau|^{\alpha}|s_0 - s|^{\alpha} \leqslant C'(e^{\varphi(x,s)} + |\tau|^{\alpha}),$$

et alors l'inégalité classique $(x+y)^\beta \leqslant 2^\beta(x^\beta + y^\beta)$ pour x, y positifs donne

$$e^{2c\varphi(x, s+\tau(s_0-s))} \leqslant C_2(e^{2c\varphi(x,s)} + |\tau|^{2c\alpha}).$$

Ainsi, comme $k\epsilon \geqslant 1$, on a l'inégalité :

$$\int_{\Omega\times D} \frac{1}{(e^{2c\varphi(x,s)} + |\tau|^{2c\alpha})|\tau|^{2(1-1/k)}} dV(x)dV(\tau) \leqslant C_3(k).$$

A ce stade, on restreint l'intégration à une famille de disques $|\tau| \leqslant \delta e^{\alpha^{-1}\varphi(x,s)}$ (avec δ suffisamment petit pour s'assurer que le rayon en question est plus petit que 1 ; le choix d'un tel δ étant possible car φ est majorée) afin d'obtenir

$$\int_{\Omega} e^{-2(c-\frac{1}{k\alpha})\varphi(x,s)} dV(x) \leqslant C_4(k),$$

ce qui permet de conclure en prenant k arbitrairement grand, et $s \in V_k$. □

Munis du résultat précédent, il nous suffit de réunir toutes les pièces élaborées dans les parties antérieures pour obtenir le théorème de semi-continuité dans le cas holomorphe.

Théorème 15.2. — *Soit X une variété complexe et $K \subset X$ un compact. Alors $f \mapsto c_K(f)$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{O}_X(X)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Plus précisément, pour toute fonction non nulle f, pour tout compact L contenant K dans son intérieur et tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\delta = \delta(f, \epsilon, K, L)$ tel que :*

$$\sup_L |g - f| < \delta \Longrightarrow c_K(g) \geqslant c_K(f) - \epsilon.$$

Démonstration. — La première étape est de montrer que l'on peut supposer que K est un point. Pour cela, on suppose que le résultat du théorème est faux. Alors cela signifie qu'il existe une suite de fonctions holomorphes $f_i \in \mathcal{O}_X(X)$ convergeant uniformément sur L et tels que $c_K(f_i) < c_K(f) - \epsilon$. Alors, on sait par la proposition 8.3 qu'il existe une suite de points (a_i) de K tels que $c_{a_i}(f_i) \leqslant c_K(f) - \epsilon$. Par compacité de K, on peut supposer que (a_i) converge vers $a \in K$. On choisit ensuite une carte locale en a, et on considère les fonctions F_i définies (pour i assez grand) sur une petite boule $\bar{B}(a, r) \subset \mathring{L}$ par $F_i(x) = f_i(x + a_i - a)$.
Alors, F_i converge vers f sur $\bar{B}(a, r)$ car pour i assez grand,

$$|F_i(x) - f(x)| \leqslant |f_i(x + a_i - a) - f(x + a_i - a)| + |f(x + a_i - a) - f(x)|$$

quantité qui tend vers 0 si $|a_i - a|$ tend vers 0. Alors

$$c_a(F_i) = c_{a_i}(f_i) \leqslant c_K(f) - \epsilon \leqslant c_a(f) - \epsilon$$

et on s'est ramené au cas où K est un point, qu'on notera 0 quitte à prendre une carte.

Maintenant, on va opérer une seconde réduction pour se ramener au cas de polynômes de degrés bornés et utiliser ensuite la sous-additivité de l'exposant holomorphe. On note, pour une fonction holomorphe f, p_k sa partie de degré $\leqslant k$ dans son développement de Taylor. Par la propriété de sous-additivité vue au théorème 14.2 appliquée à $f - p_k$ et p_k (resp. à $p_k - f$ et f), on a $|c_0(f) - c_0(p_k)| \leqslant c_0(f - p_k)$. D'autre part, comme $|f(z) - p_k(z)| = O(|z|^{k+1})$, et que $|z^{k+1}|^{-2c}$ n'est pas intégrable en 0 dès que $c \geqslant n/(k+1)$, on en déduit que

$$|c_0(f) - c_0(p_k)| \leqslant \frac{n}{k+1}.$$

On choisit maintenant (f_i) une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément vers f sur un voisinage U de 0 donné. Alors, par convergence des dérivées en 0, on sait que les troncatures $p_{i,k}$ convergent toutes vers p_k dans l'espace $\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]_k$ (de dimension finie) des polynômes de degré total inférieur ou égal à k. Pour pouvoir appliquer la proposition 15.1, il nous faut changer un peu notre point de vue en considérant un polynôme P comme fonction de ses coefficients $s=(s_\alpha)$:

$$P(z,s)=\sum_{|\alpha|\leqslant k} s_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]_k.$$

On peut donc appliquer la proposition 15.1 en prenant pour $S=S_k$ une boule contenant l'espace des coefficients possibles (on peut prendre la boule bornée grâce à la convergence des $p_{i,k}$ vers p_k). Alors on obtient la semi-continuité inférieure de $s\in S\mapsto c_0(P(\bullet,s))$, qui implique en particulier :

$$c_0(p_{i,k})>c_0(p_k)-\frac{\epsilon}{2}\quad \text{pour } i>i(k,\epsilon),$$

et ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} c_0(f) &= (c_0(f)-c_0(p_k))+(c_0(p_k)-c_0(p_{i,k}))+(c_0(p_{i,k})-c_0(f_i))+c_0(f_i)\\ &< c_0(f_i)+\frac{2n}{k+1}+\frac{\epsilon}{2}\\ &< c_0(f_i)+\epsilon \end{aligned}$$

pour $k\geqslant 4n/\epsilon$. □

16. Semi-continuité de l'exposant de singularité psh

Même si le résultat suivant ne nous servira pas pour démontrer le théorème de semi-continuité général, remarquons que les estimées de volumes vues au théorème 8.9, qui nous ont servi de manière fondamentale pour établir la propriété de sous-additivité, se généralisent presque, et sans véritable difficulté, à l'aide du théorème d'approximation de Demailly :

Proposition 16.1. — *Soient $\varphi\in(X),\psi\in(Y)$ des fonctions psh sur des variétés complexes X,Y, et $K\subset X, L\subset Y$ des compacts. Alors :*

(i) Pour tous nombres réels c',c'' strictement positifs avec $c'>c_K(\varphi)>c''$ et tout voisinage U de K suffisamment petit, alors on a l'estimée :

$$C_1 r^{2c'}\leqslant \mu_U(\{\varphi<\log r\})\leqslant C_2 r^{2c''},\quad \forall r<r_0$$

pour un $r_0>0$ et $C_1=C_1(c'),C_2=C2(c'')$;

(ii) $c_{K\times L}(\max(\varphi(x),\psi(y))\leqslant c_K(\varphi)+c_L(\psi)$;

(iii) Si $X=Y$, alors $c_x(\max(\varphi,\psi))\leqslant c_x(\varphi)+c_x(\psi)$.

Démonstration. — Pour le premier point, on commence par remarquer que l'estimée supérieure est claire par l'inégalité, pour $U\supset K$ suffisamment petit :

$$\int_U e^{-2c''\varphi}dV\geqslant \int_{U\cap\{\varphi<\log r\}} e^{-2c''\varphi}dV\geqslant r^{-2c''}\mu_U(\{\varphi<\log r\}).$$

Pour l'autre inégalité, on utilise les approximants ψ_m de φ donnés par le théorème de Demailly 11.4, auxquels on applique les estimées du théorème 8.9 (en effet, ψ_m est bien à singularités analytiques comme on l'a vu au cours de la démonstration du théorème 11.4). On obtient :

$$\mu_U(\{\psi_m < \log r\}) \geqslant C_{1,m} r^{-2c_K(\psi_m)}.$$

D'autre part, on sait qu'on a l'inégalité $\varphi \leqslant \psi_m + C_{2,m}$ avec $C_{2,m}$ tendant vers 0 quand m tend vers l'infini. Dès lors,

$$\begin{array}{rcl} \mu_U(\{\varphi < \log r\}) & \geqslant & \mu_U(\{\psi_m < \log(re^{-C_{2,m}})\}) \\ & \geqslant & C_{3,m}\, r^{-2c_K(\psi_m)} \end{array}$$

ce qui conclut car on sait que $c_K(\psi_m)$ converge vers $c_K(\varphi)$.
Pour les autres points, ils dérivent du premier par les mêmes arguments que dans le cas holomorphe.

□

La proposition suivante, une remarque technique importante pour la suite, montre que dans le cas holomorphe, le calcul de l'exposant de singularité d'un idéal (suffisamment singulier) se ramène à celui d'un sous-idéal *principal* :

Proposition 16.2. — *Soient $g_1, \ldots, g_p$ des fonctions holomorphes définies sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, et soit x dans la variété des zéros de l'idéal engendré par les g_i. Alors*

$$c_x(\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_p g_p) \leqslant \min\{c_x(g_1, \ldots, g_p), 1\}$$

pour tous les coefficients $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$. De plus, l'inégalité a lieu pour tous les $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ dans le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle dans $\mathbb{C}^p$. En particulier, si $\mathscr{I}$ est un idéal arbitraire et $c_x(\mathscr{I}) \leqslant 1$, alors il existe un idéal principal $(f) \subset \mathscr{I}$ tel que $c_x(f) = c_x(\mathscr{I})$.

Démonstration. — D'après l'exemple 8.5, l'inégalité $c_x(\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_p g_p) \leqslant 1$ est évidente. D'autre part, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a aussi :

$$|\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_p g_p|^{-2c} \geqslant \left(\sum |\alpha_j|^2\right)^{-c} \left(\sum |g_j|^2\right)^{-c}$$

ce qui achève de montrer l'inégalité recherchée.
On fixe maintenant $c < \min\{c_x(g_1, \ldots, g_p), 1\}$. Si $w \in \mathbb{C}^p$ est un vecteur, on dispose de l'identité :

$$\int_{|\alpha|=1} |\alpha \cdot w|^{-2c} d\sigma(\alpha) = A_c |w|^{-2c},$$

où $d\sigma$ est la mesure euclidienne de la sphère, et où A_c est une constante, finie car $c < 1$. Pour le voir, on remarque que la quantité $|w|^{2c} \int_{|\alpha|=1} |\alpha \cdot w|^{-2c} d\sigma(\alpha)$ est invariante par rotations (grâce à l'invariance de $d\sigma$ sous $\mathrm{SO}(2p, \mathbb{R})$) et par homothéties, donc ne dépend pas de w. Pour la convergence de l'intégrale, on peut donc supposer que $w = e_1$ est le premier vecteur d'une base orthonormée de $\mathbb{C}^p$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{|\alpha|=1} |\alpha \cdot w|^{-2c} d\sigma(\alpha) & \leqslant & \displaystyle\int_{D_{\mathbb{C}^p}(0,1)} |\alpha_1|^{-2c} dV(\alpha) \\ & \leqslant & \displaystyle C \int_{D_{\mathbb{C}}(0,1)} |z|^{-2c} dV(z) \end{array}$$

Alors il existe un voisinage U_c de x sur lequel intégrer l'inégalité précédente donne :

$$\int_{|\alpha|=1} d\sigma(\alpha) \int_{U_c} |\alpha_1 g_1(z) + \cdots + \alpha_p g_p(z)|^{-2c} dV(z) = A_c \int_{U_c} \left(\sum |g_i(z)|^2 \right)^{-c} dV(z) < +\infty.$$

Ainsi pour presque tout α dans la sphère (et donc pour presque tout $\alpha \in \mathbb{C}^p$, disons $\alpha \in \mathbb{C}^p - N_c$ avec $\mu(N_c) = 0$), l'intégrale $\int_{U_c} |\alpha_1 g_1(z) + \cdots + \alpha_p g_p(z)|^{-2c} dV(z)$ est finie. En notant $c_0 = \min\{c_x(g_1, \ldots, g_p), 1\}$ et $N = \cup_n N_{c_0 - 1/n}$, on trouve l'égalité recherchée pour $\alpha \in \mathbb{C}^p - N$, ce qui conclut. □

Avant de passer à la preuve du théorème de semi-continuité général 8.11, il nous faut généraliser la version à paramètre vue dans la proposition 15.1. A nouveau, comme pour tout résultat effectif de ce type, on ne peut espérer utiliser des log-résolutions, mais c'est le théorème d'Ohsawa-Takegoshi qui sera la clé :

Proposition 16.3. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert pseudoconvexe borné, et soit $f_i \in \mathcal{O}(\Omega)$ une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact vers $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. On fixe $K \subset \Omega$ compact, et $c < c_K(f)$. Alors il existe un voisinage U de K et une borne uniforme $C > 0$ telle que*

$$\int_U |f_i|^{-2c} dV \leqslant C$$

pour tout $i \geqslant i_0$ assez grand.

Démonstration. — L'idée générale est d'appliquer la proposition 15.1 aux troncatures des fonctions f_i, et de scinder les variables pour les f_i et les restes afin d'utiliser le théorème d'Ohsawa-Takegoshi. Pour commencer, on remarque que le résultat est de nature locale, et par compacité de K, il suffit de montrer qu'il existe un tel U voisinage d'un point prescrit de K. On se donne donc un point $x_0 \in K$ (qu'on supposera être le point 0), puis des nombres réels c', c'' vérifiant $c < c' < c'' < c_K(f) \leqslant c_0(f)$. Pour k suffisamment grand, on a alors :

$$c < c'' - \frac{n}{k+1} < c'' < c' < c_0(f) - \frac{n}{k+1}.$$

On introduit ensuite la troncature p_k de f à l'ordre k dans son développement en série de Taylor à l'origine. On sait par la propriété de sous-additivité qu'on a l'inégalité : $c_0(p_k) \geqslant c_0(f) - \frac{n}{k+1} > c'$. Alors, par définition de $c_0(p_k)$, il existe une boule B' centrée en 0, de rayon r'_0 telle que

$$\int_{B'} |p_k|^{-2c'} dV < +\infty.$$

A k fixé, les propriétés usuelles des fonctions holomorphes garantissent la convergence uniforme des $p_{i,k}$ vers p_k sur tout compact de $\mathbb{C}^n$. Alors, la proposition 15.1 appliquée comme dans la preuve du théorème 15.2 donne l'existence d'une boule $B'' \Subset B'$ et d'une constante M telles que pour $i \geqslant i_0$ (toutes ces quantités dépendent de k bien sûr), on ait :

$$\int_{B''} |p_{i,k}|^{-2c''} dV \leqslant M.$$

Alors, l'idée est de voir cette intégrale comme l'intégrale de la fonction 1 pour le poids $2c'' \log |p_{i,k}|$, puis ensuite d'écrire $p_{i,k} = f_i - g_{i,k}$ pour remarquer que le poids précédent est la restriction à la diagonale de $B'' \times B''$ du poids $\psi(x,y) = 2c'' \log |f_i(x) - g_{i,k}(y)|$. Le théorème d'Ohsawa-Takegoshi nous garantit l'existence d'une fonction holomorphe F_i sur $B'' \times B''$ telle que $F_i(x,x) = 1$, et aussi :

$$\int_{B'' \times B''} |F_i(x,y)|^2 |f_i(x) - g_{i,k}(y)|^{-2c''} dV(x)dV(y) \leqslant C_1$$

pour une constante C_1 indépendante de i. Par les mêmes raisonnements que dans la preuve de la proposition 15.1, la borne L^2 montre que la famille des (F_i) est normale, et donc qu'il existe une boule $B = B(0, r_0) \Subset B''$ telle que $|F_i(x,y)|^2 \geqslant 1/2$ sur $B \times B$, et donc pour $i \geqslant i_0$, on a :

$$\int_{B \times B} |f_i(x) - g_{i,k}(y)|^{-2c''} dV(x)dV(y) \leqslant 4C_1. \tag{16.1}$$

Par convergence uniforme de f_i vers f, et comme le reste $g_{i,k}$ s'exprime par une intégrale faisant intervenir les dérivées d'ordre $k+1$ de f_i, on dispose d'une estimée uniforme $|g_{i,k}(y)| \leqslant C_2 |y|^{k+1}$ sur B. Alors, il suffit ensuite d'intégrer l'inégalité (16.1) par rapport à y le long des boules $|y| < (|f_i(x)|/2C_2)^{1/(k+1)}$ de mesure $C|f_i(x)|^{2n/(k+1)}$ (où l'on a donc $|g_{i,k}(y)| \leqslant |f_i(x)|/2$, et ainsi $|f_i(x) - g_{i,k}(y)| \geqslant |f_i(x)|/2$) pour trouver

$$\int_B |f_i(x)|^{2n/(k+1) - 2c''} dV(x) \leqslant C_3.$$

Enfin, l'inégalité $c'' - n/(k+1) > c$ donne le résultat attendu. □

Maintenant, nous avons tout en main pour démontrer le théorème de semi-continuité de l'exposant de singularité :

Démonstration du théorème 8.11. — On choisit donc une suite φ_i de fonctions psh sur un ouvert pseudoconvexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, qui converge au sens des distributions vers $\varphi \in \mathrm{Psh}(\Omega)$. On sait alors, par le théorème 2.11, φ_i converge presque partout et dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ vers φ.

On fixe un compact $K \subset \Omega$, et par le théorème d'approximation de Demailly, à m$\in \mathbb{N}^*$ fixé, toute base orthonormée $(g_{j,m,k})$ de $\mathcal{H}^2(\Omega, m\varphi_j)$ vérifie :

$$\varphi_j(z) - \frac{C_1}{m} \leqslant \frac{1}{2m} \log \sum_{k \in \mathbb{N}} |g_{j,m,k}|^2 \leqslant \sup_{|\zeta - z| < r|} \varphi_j(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n} \tag{16.2}$$

pour tout $z \in \Omega$ et tout $r < d(z, \partial\Omega)$. D'autre part, on sait que $\overline{\lim}_{j \to +\infty} \sup_L \varphi_j \leqslant \sup_L \varphi$ pour tout compact $L \subset \Omega$ par le théorème 2.11, et donc la famille de fonctions holomorphes $(g_{j,m,k})_j$ est localement bornée.

Or, il suffit de montrer le résultat recherché pour une sous-suite : en effet, si le théorème était faux, il existerait une suite φ_j convergeant faiblement vers φ et un $c < c_K(\varphi)$ tel que pour tout ouvert $U \supset K$, $e^{-2c\varphi_j}$ ne converge pas vers $e^{-2c\varphi}$ sur $L^1(U)$. Ceci signifie qu'il existe $\epsilon_U > 0$ et une sous-suite $\varphi_{\sigma(j)}$ telle que $\int_U |e^{-2c\varphi} - e^{-2c\varphi_{\sigma(j)}}| dV \geqslant \epsilon_U$. Alors, en prenant la suite $\varphi_{\sigma(j)}$, il n'existe pas de sous-suite telle qu'on ait la convergence L^1 souhaitée.

Ainsi, quitte à extraire, on peut supposer que $(g_{j,m,k})_j$ converge uniformément sur les compacts vers $g_{m,k} \in \mathcal{O}(\Omega)$, ainsi que φ_j converge presque partout vers φ. Alors, en passant à la limite supérieure dans l'inégalité (16.2), on trouve pour presque tout $z \in \Omega$:

$$\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \leqslant \frac{1}{2m} \log \sum_{k \in \mathbb{N}} |g_{m,k}|^2 \leqslant \sup_{|\zeta - z| < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}.$$

En fixant un ouvert relativement compact $\Omega' \Subset \Omega$ contenant K, l'équation (11.1) garantit l'existence d'un entier $k_0(m)$ et d'une constante $C_4(m)$ telle que pour presque tout $z \in \Omega'$, on ait :

$$\varphi(z) - C_4(m) \leqslant \frac{1}{2m} \log \sum_{k=0}^{k_0(m)} |g_{m,k}|^2.$$

Ainsi, pour $c < c_K(\varphi)$, il existe un voisinage U de K tel que

$$\int_U (\sum_{k=0}^{k_0(m)} |g_{m,k}|^2)^{-c/m} dV \leqslant e^{2cC_4(m)} \int_U e^{-2c\varphi} dV < +\infty.$$

Pour m assez grand, on a $c/m < 1/2$ et alors la proposition 16.2, ou plutôt sa preuve, montre qu'il existe une combinaison linéaire appropriée $\sum_{k=0}^{k_0(m)} \alpha_{m,k} g_{m,k}$ avec $(\alpha_{m,k})_k$ dans la sphère unité de $\mathbb{C}^{k_0(m)+1}$ telle que

$$\int_U \left| \sum_{k=0}^{k_0(m)} \alpha_{m,k} g_{m,k} \right|^{-2c/m} dV \leqslant C_5(m) \int_U e^{-2c\varphi} dV < +\infty$$

où $C_5(m)$ est une constante qui ne dépend que de m. On pose alors

$$f_{j,m} = \sum_{k=0}^{k_0(m)} \alpha_{m,k} g_{j,m,k},$$

c'est un élément de la sphère unité de l'espace $\mathcal{H}^2(\Omega, m\varphi_j)$, et bien sûr, $f_{j,m}$ converge uniformément vers $f_m = \sum_{k=0}^{k_0(m)} \alpha_{m,k} g_{m,k}$, cette dernière fonction vérifiant $\int_U |f_m|^{-2c/m} dV < +\infty$. Alors, la proposition 16.3 montre que pour tout $c' < c$, et $K \subset U' \Subset U$, il existe une borne uniforme $\int_{U'} |f_{j,m}|^{-2c'/m} dV \leqslant C_6(m)$, pour $j \geqslant j_0$ assez grand. D'autre part, comme $\int_{U'} |f_{j,m}|^2 e^{-2m\varphi_j} dV \leqslant 1$, l'inégalité de Hölder appliquée aux exposants $p = 1 + m/c'$ et $q = 1 + c'/m$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{U'} e^{-2mc'/(m+c')\varphi_j} dV &= \int_{U'} (|f_{j,m}|^2 e^{-2m\varphi_j})^{c'/(m+c')} |f_{j,m}|^{-2c'/(m+c')} dV \\ &\leqslant \left(\int_{U'} |f_{j,m}|^{-2c'/m} dV \right)^{m/(m+c')} \leqslant C_7(m) \end{aligned}$$

pour $j \geqslant j_0$. Comme c, c' sont arbitraires avec seule contrainte $c' < c < c_K(\varphi)$, l'exposant $mc'/(m+c')$ peut être pris aussi proche de $c_K(\varphi)$ que l'on veut en prenant m grand, et donc pour $j \geqslant j_0(\epsilon)$, on a bien $c_K(\varphi_j) \geqslant c_K(\varphi) - \epsilon$.

On fixe maintenant $c < c_K(\varphi)$, et on prend $\delta > 0$ tel que $(1+\delta)c < c_K(\varphi)$. Alors par les inégalités précédentes, on sait que la famille $(e^{-2c(1+\delta)\varphi_j})_{j \geqslant j_0(\delta)}$ est bornée dans $L^1(U)$ pour U un voisinage suffisamment proche de K. Autrement dit, la famille $(e^{-2c\varphi_j})_{j \geqslant j_0(\delta)}$ est bornée dans $L^{1+\delta}(U)$, donc on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_{U \cap \{e^{-2c\varphi_j} > M\}} e^{-2c\varphi_j} dV &= \int_{U \cap \{e^{-2c\varphi_j} > M\}} e^{-2(1+\delta)c\varphi_j} e^{2c\delta\varphi_j} dV \\ &\leqslant M^{-\delta} \int_U e^{-2(1+\delta)c\varphi_j} dV \\ &= C_8 M^{-\delta} \end{aligned}$$

pour $j \geqslant j_1(\delta)$, avec C_8 indépendante de j. Ceci montre que la suite $(e^{-2c\varphi_j})_{j \geqslant j_1(\delta)}$ est équiintégrable, et comme U est de mesure finie, cela implique que cette suite converge dans $L^1(U)$. Enfin, comme sa limite ponctuelle est $e^{-2c\varphi}$, c'est également sa limite au sens L^1. $\square$

PARTIE VI
MÉTRIQUES DE KÄHLER-EINSTEIN SUR LES VARIÉTÉS DE FANO

On entre maintenant dans un paysage mathématique assez différent, car on va considérer la géométrie complexe sous l'angle de la géométrie différentielle, et non plus en tant que telle.
Le problème général est de résoudre une certaine équation (aux dérivées partielles) de nature géométrique, intervenant dans la théorie de la relativité générale, liant la coubure de Ricci d'une certaine métrique à cette même métrique. Dans le cadre kählerien général, on ne sait pas toujours dire s'il y a une solution ou pas, mais dans de nombreux cas, on connaît l'existence de solutions, ou au moins des critères d'existence. Bien sûr, la question de l'existence de métriques de Kähler-Einstein constitue un pan entier de la géométrie différentielle, et nous ne ferons qu'effleurer ce domaine.
Les principales références pour cette dernière partie sont [**Bes08**] et [**Tia00**].

17. Position du problème

Il s'agit maintenant de rentrer dans les détails du problème de l'existence de métriques de Kähler-Einstein, et de préciser quel sous-problème nous allons aborder, et en un certain sens, résoudre.
On va commencer par donner quelques rappels de géométrie différentielle élémentaire, mais avant tout, nous rappelons le lemme du $\partial\bar{\partial}$ dont l'usage est systématique par la suite :

***Lemme 17.1* (lemme du $\partial\bar{\partial}$).** — *Soit X une variété kählerienne compacte, et ω une (p,q)-forme d-fermée. Si ω est $\bar{\partial}$-exacte, alors il existe une $(p-1,q-1)$ forme φ telle que $\omega = \partial\bar{\partial}\varphi$.*

Démonstration. — Tout d'abord, par un argument de types, ω est ∂- et $\bar{\partial}$-fermée. D'autre part, il existe par hypothèse une forme η de type $(p, q-1)$ telle que $\omega = \bar{\partial}\eta$. On applique ensuite le théorème de Hodge à l'opérateur elliptique ∂ pour obtenir une décomposition :

$$\eta = \alpha + \partial\beta + \partial^*\gamma$$

où $\alpha \in \mathscr{H}_{\partial}^{(p,q)}$, $\beta \in \mathcal{C}^\infty(X, \Omega_X^{p-1,q-1}), \gamma \in \mathcal{C}^\infty(X, \Omega_X^{p+1,q-1})$. Comme X est kählerienne, on a égalité des laplaciens $\Delta_{\bar{\partial}}$ et Δ_∂, ce qui implique la décomposition :

$$\omega = \bar{\partial}\partial\beta + \bar{\partial}\partial^*\gamma.$$

D'autre part, l'identité kählerienne $[\Lambda, \bar{\partial}] = -i\bar{\partial}^*$ implique que $\partial^*\bar{\partial} = -i\bar{\partial}\Lambda\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial^*$, et donc on trouve :

$$\omega = -\partial\bar{\partial}\beta - \partial^*\bar{\partial}\gamma.$$

Enfin, comme $\partial\omega = 0$, on a $\partial\partial^*\bar{\partial}\gamma = 0$, mais $\operatorname{Ker}\partial \cap \operatorname{Im}\partial^* = \{0\}$, car si $u = \partial^* v$ est dans l'intersection, $\langle u, u\rangle = \langle v, \partial u\rangle = 0$. Ceci conclut. □

Nous donnons maintenant assez brièvement les définitions des objets fondamentaux pour la suite : tenseur de Ricci, classe de Chern, métrique de Kähler-Einstein.

17.1. Le tenseur de Ricci. — Pour commencer, il y a deux manières de définir le tenseur de Ricci dans le cadre d'une variété kählerienne. Tout d'abord, on peut voir la variété kählerienne (X, ω) comme une variété riemannienne (X, g) où g est la métrique induite sur $T_{\mathbb{R}}X$ par la forme de Kähler. Alors, (X, g) possède un tenseur de courbure (riemannien) R défini par

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

et qu'on peut étendre par $\mathbb{C}$-linéarité à $T_{\mathbb{C}}X = T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$.
On note $R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$.
Alors, on définit en géométrie riemannienne le tenseur de Ricci de g (ou ici de ω) par la formule :

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Tr}(Z \mapsto R(Z, X)Y).$$

On définit donc ainsi un 2-tenseur symétrique.

On se place maintenant du point de vue de la géométrie complexe.
Localement, on a donc des coordonnées $z_1, \dots, z_n$ de X, et donc un repère $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n})$ de $T_{\mathbb{R}}X$. La structure complexe de X donne un endomorphisme J de $T_{\mathbb{R}}X$ tel que $J^2 = -\mathrm{id}$. Étendu par $\mathbb{C}$-linéarité, J est donc diagonalisable dans la base locale précédente, avec :

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_j} \quad \text{et} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}.$$

Notons d'autre part ([**Voi02**], thm 3.13) qu'une métrique g est kählerienne si et seulement si l'endomorphisme J est plat pour la connexion de Levi-Civita, c'est-à-dire si et seulement si pour tout champ de vecteur X, on a $\nabla(JX) = J\nabla X$.
En étendant g à $T_{\mathbb{C}}X$ par $\mathbb{C}$-linéarité, la compatibilité de J : $g(X, Y) = g(JX, JY)$, montre que que les seuls éléments de la base précédente non orthogonaux deux à deux sont les $\frac{\partial}{\partial z_i}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$. Ainsi, on note :

$$g_{i\bar{j}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right).$$

Remarque 25.
Une remarque importante est que la métrique étendue devient seulement une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $T_{\mathbb{C}}X$, et possède des vecteurs isotropes. Pour définir une métrique hermitienne, il faut donc se restreindre à l'espace $T^{1,0}X$ (il possède une structure holomorphe), où l'on peut poser $h(X, Y) = g(X, \bar{Y})$ (rappelons que la conjugaison est définie sur $T_{\mathbb{C}}X = T_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$-linéarité en posant $\overline{Y \otimes \lambda} := Y \otimes \bar{\lambda}$).

Alors, le fait que J soit parallèle montre que $R(X, Y)JZ = JR(X, Y)Z$, et donc $R(X, Y, JZ, JT) = R(X, Y, Z, T)$. Ceci implique que si Z et T sont de même type, alors $R(X, Y, Z, T) = 0$. Par les symétries du tenseur de courbure, les seuls termes non nuls sont les :

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}\right).$$

Alors, en notant $g^{i\bar{j}}$ le (i, j)-ème coefficient de la matrice $(g_{i\bar{j}})^{-1}$, un calcul montre que

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\bar{\partial}^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} + g^{s\bar{t}} \frac{\partial g_{s\bar{j}}}{\partial z_k} \frac{\partial g_{i\bar{t}}}{\partial \bar{z}_l}.$$

On définit alors le tenseur de Ricci, qu'on notera Ric, comme étant la trace de l'endomorphisme $R_{k\bar{l}}$.

Remarque 26.
Si $\omega_g = \frac{i}{2}\sum_{j,k} g_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$, on définit la forme de Ricci : $\mathrm{Ric}(\omega) = \frac{i}{2}\sum_{j,k} R_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$.

Il n'est pas très difficile de voir que les deux tenseurs de Ricci introduits coïncident. Pour faire le lien entre les deux, le point de départ est de choisir une base orthonormée $e_1, \ldots, e_{2n}$ de $T_{\mathbb{R}}X$ telle que $Je_i = e_{n+i}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. A partir de cette base, on peut construire une base unitaire $u_1, \ldots, u_n$ (*ie* $g(u_k, \bar{u}_l) = \delta_{kl}$) en posant $u_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - iJe_k)$, et alors quelques calculs (n'utilisant essentiellement que la première identité de Bianchi pour R) montrent que $\mathrm{Ric}(u_k, \bar{u}_k) = \mathrm{Ric}(e_k, e_k)$, donc les deux objets introduits sont bien les « mêmes ».

Ouvrons une petite parenthèse pour donner le lemme élémentaire suivant, qui est très souvent utilisé :

Lemme 17.2. — *Soit A un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n muni de g, une forme quadratique définie positive. Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E, et si G désigne la matrice de g dans cette base, alors :*

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i,j} (G^{-1})_{i,j}\, g(Ae_i, e_j).$$

Démonstration. — Par définition, on a $g(Ae_j, e_i) = (G\cdot A)_{i,j}$, donc $A_{i,j} = (G^{-1}\cdot (g(Ae_l, e_k))_{k,l})_{i,j}$, et le résultat s'ensuit. □

Alors, en notant $g^{i\bar{j}}$ le (i,j)-ème coefficient de la matrice $(g_{i\bar{j}})^{-1}$, on a donc la formule (la sommation étant comme d'habitude tacite) :

$$\mathrm{Ric}_{k\bar{l}} = -g^{i\bar{j}} \frac{\bar{\partial}^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} + g^{i\bar{j}} g^{s\bar{t}} \frac{\partial g_{s\bar{j}}}{\partial z_k} \frac{\partial g_{i\bar{t}}}{\partial \bar{z}_l}. \tag{17.1}$$

On voudrait avoir une expression plus agréable du tenseur de Ricci, au moins en coordonnées. La proposition va dans ce sens :

Proposition 17.3. — *Le tenseur de Ricci s'exprime dans des coordonnées par la formule :*

$$\mathrm{Ric}_{k\bar{l}} = -\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(\log \det g_{i\bar{j}}).$$

Remarque 27.
On peut voir directement que l'expression $-\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(\log \det g_{i\bar{j}})$ est intrinsèque, car un changement de base fait apparaître un terme $\log\det({}^t\bar{P}P) = \log|\det P|^2$ annulé par $\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}$, P étant holomorphe .

Démonstration. — On note $G_1, \ldots, G_n$ les colonnes de la matrice G. Alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(\log \det g) = \frac{1}{\det g} \frac{\partial^2 (\det g)}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} - \frac{1}{(\det g)^2} \frac{\partial (\det g)}{\partial z_k} \frac{\partial (\det g)}{\partial \bar{z}_l}.$$

Or, on a, par multilinéarité puis grâce aux formules de Cramer :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\det g}\frac{\partial(\det g)}{\partial z_k} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\det g}\det(G_1,\ldots,G_{i-1},\frac{\partial G_i}{\partial z_k},G_{i+1},\ldots,G_n)\\ &= \sum_{i=1}^n \left(G^{-1}\cdot\frac{\partial G_i}{\partial z_k}\right)_i\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} g^{i\bar{j}}\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k}\end{aligned}$$

Ainsi, on peut poursuivre le calcul :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\det g}\frac{\partial^2(\det g)}{\partial z_k\partial\bar{z}_l} &= \frac{1}{\det g}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_l}\left(\det g\cdot g^{i\bar{j}}\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k}\right)\\ &= \sum_{i,j,s,t} g^{s\bar{t}}\frac{\partial g_{s\bar{t}}}{\partial\bar{z}_l}g^{i\bar{j}}\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k}+\sum_{i,j}g^{i\bar{j}}\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k\partial\bar{z}_l}+\sum_{i,j}\frac{\partial g^{i\bar{j}}}{\partial\bar{z}_l}\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k}\end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, simplifions ce que nous pouvons :

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\partial\bar{z}_l}(\log\det g)=\sum_{i,j}g^{i\bar{j}}\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k\partial\bar{z}_l}+\sum_{i,j}\frac{\partial g^{i\bar{j}}}{\partial\bar{z}_l}\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k}$$

et donc, via la formule (17.1), tout ce qu'il nous faut montrer est l'identité suivante :

$$-\sum_{i,j}\frac{\partial g^{i\bar{j}}}{\partial\bar{z}_l}\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k}=\sum_{i,j,s,t}g^{i\bar{j}}g^{s\bar{t}}\frac{\partial g_{s\bar{j}}}{\partial z_k}\frac{\partial g_{i\bar{t}}}{\partial\bar{z}_l}.$$

Pour ce faire, on écrit $GG^{-1}=\mathrm{id}$, donc en dérivant, on obtient :

$$\frac{\partial G^{-1}}{\partial\bar{z}_l}=-G^{-1}\frac{\partial G}{\partial\bar{z}_l}G^{-1}$$

d'où en prenant les composantes :

$$\frac{\partial g^{i\bar{j}}}{\partial\bar{z}_l}=-\sum_{s,t}g^{i\bar{s}}g^{t\bar{j}}\frac{\partial g_{s\bar{t}}}{\partial\bar{z}_l}$$

et ainsi :

$$-\sum_{i,j}\frac{\partial g^{i\bar{j}}}{\partial\bar{z}_l}\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k}=\sum_{i,j,s,t}g^{i\bar{s}}g^{t\bar{j}}\frac{\partial g_{s\bar{t}}}{\partial\bar{z}_l}\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z_k}$$

ce qui conclut après réordonnement des indices, g étant symétrique. □

Remarque 28.
Il existe de ce résultat une preuve plus conceptuelle, expliquée dans [Bes08].

Corollaire 17.4. — *La forme de Ricci,* $\mathrm{Ric}(\omega)$*, d'une variété kählerienne* (X,ω) *est une* $(1,1)$*-forme fermée qui ne dépend que de la structure complexe de* X *et de la forme volume associée de la métrique kählerienne.*

Passons maintenant à un autre objet fondamental, les classes de Chern, et plus particulièrement la première classe de Chern. Il ne s'agit pas de les redéfinir ici, mais seulement de rappeler leurs propriétés importantes pour la suite.
On part donc d'une variété kählerienne (X, ω_g) (mais en fait, tout est purement différentiel, et en un sens même algébrique) et on considère son tenseur de courbure R. On peut considérer $R = R(X, Y)$ comme une 2-forme (réelle), de type $(1,1)$, et à valeurs dans le fibré vectoriel des endomorphismes anti-hermitiens de TX, ce dernier étant canoniquement isomorphe (la métrique g est fixée) à $\Lambda^{1,1}TX$.
Alors, on s'intéresse au polynôme $\det(I + t\frac{iR}{2\pi}) = 1 + c_1(R)t + c_2(R)t^2 + \cdots$. Alors $c_p(R)$ est une forme réelle de type (p,p) appelée p-ème classe de Chern de R.
Pour la suite, on se concentre sur la première classe de Chern $c_1(R) = \mathrm{Tr}(\frac{iR}{2\pi})$.

Théorème 17.5. — *Soit $(X, \omega$ une variété kählerienne, alors la première classe de Chern $c_1(R)$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $c_1(R)$ est fermée, et $[c_1(R)] \in H^2(X, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(X, \mathbb{C})$;

(ii) $[c_1(R)]$ ne dépend pas de la métrique g, on note cette classe $c_1(X)$;

(iii) $c_1(X)$ est représentée par la $(1,1)$-forme $\frac{1}{\pi}\mathrm{Ric}(\omega)$.

Démonstration. — On regarde rapidement les deux derniers points :

$$c_1(R) = \mathrm{Tr}(\frac{i}{2\pi}R_{k\bar{l}})dz_k \wedge d\bar{z}_l = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{k\bar{l}}),$$

et donc

$$c_1(R_g) - c_1(R_{g'}) = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{\det(g_{k\bar{l}})}{\det(g'_{k\bar{l}})}\right).$$

D'autre part, si $f : U \to V$ est lisse entre deux ouverts de $\mathbb{C}^n$, alors pour toute $(1,1)$-forme ω sur V, on a $\det(f^*\omega) = f^*(\det\omega) = J_f\ \det(\omega \circ f)$, donc la quantité $\frac{\det\omega}{\det\omega'}$ a bien un sens pour ω, ω' des $(1,1)$-formes sur une variété complexe.
Ainsi $\log\left(\frac{\det(g_{k\bar{l}})}{\det(g'_{k\bar{l}})}\right)$ définit bien une fonction sur X, ce qui conclut pour le deuxième point. □

17.2. Métriques de Kähler-Einstein. — On va maintenant commencer à décrire le problème de l'existence de métriques de Kähler-Eistein, avant, dans la partie suivante, de donner un critère dans le cas où X est de Fano.
Tout d'abord, un notion importante est celle de classe positive :

Définition 17.6. — On dit que $c_1(X) > 0$ (resp. $c_1(X) < 0$) si $c_1(X)$ peut être représentée par une forme positive (resp. négative). On dit que $c_1(X) = 0$ si la première classe de Chern $c_1(X)$ est cohomologue à 0.

La notion précédente a bien un sens, car une classe ne peut être à la fois positive et négative : en effet, un classe positive vérifie (dans le cas compact par exemple) $\int_X c_1(X)^n > 0$ (l'intégrale ne dépend pas du représentant de $c_1(X)$ bien sûr).

Définition 17.7. — Une métrique kählerienne ω sur une variété complexe X est dite de Kähler-Einstein si la forme de Ricci est proportionnelle à la forme de Kähler :

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\,\omega$$

pour un certain réel λ.

Remarque 29.
Comme pour tout réel $\mu > 0$, $\mathrm{Ric}(\mu g) = \frac{1}{\mu}\mathrm{Ric}(g)$, on peut se ramener aux trois cas $\lambda = -1, 0, 1$.

Le problème de l'existence de métriques de Kähler-Einstein est un problème très difficile en général. Analysons d'abord quelques conséquences de l'existence de telles métriques.
Tout d'abord, l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein implique que la classe de Chern $c_1(M)$ a un signe (éventuellement nul) imposé par celui de λ, ce qui n'est pas le cas pour des variétés générales.
D'autre part $\mathrm{Ric}(\omega) = \omega$, alors en particulier, ω et Ric ont même classe de cohomologie, et en particulier, $[\omega] = \pi c_1(X)$.
Inversement, on peut se demander si pour une forme donnée Ω représentant $\pi c_1(X)$, il existe une métrique kählerienne ω telle que $\mathrm{Ric}(\omega) = \Omega$. Ou mieux encore, si, données une forme Ω représentant $\pi c_1(X)$, et une classe de cohomologie $[\alpha] \in H^2(M, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(M, \mathbb{C})$, il existe une métrique kählerienne ω telle que $\omega \in [\alpha]$, et $\mathrm{Ric}(\omega) = \Omega$.
Cette question a été soulevée par Calabi, et résolue par Yau dans les année 70 :

***Théorème 17.8* (Calabi, Yau)**. — *Soit X une variété kählerienne compacte, et $[\alpha] \in H^2(M, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(M, \mathbb{C})$. Si Ω est une forme représentant $\pi c_1(X)$, alors il existe une unique métrique kählerienne $\omega \in [\alpha]$ telle que* $\mathrm{Ric}(\omega) = \Omega$.

Il s'agit là d'un théorème difficile, riche de conséquence, et que nous n'allons pas démontrer. Ce qui est intéressant dans ce théorème, qui a l'air plus bien plus faible qu'un théorème d'existence de métrique de Kähler-Einstein, c'est que sa démonstration est proche, mais plus technique que celle du théorème suivant :

***Théorème 17.9* (Aubin, Yau)**. — *Soit X une variété kählerienne compacte avec $c_1(X) < 0$, alors il existe une unique métrique de Kähler-Einstein ω avec* $\mathrm{Ric}(\omega) = -\omega$.

Le noyau commun dans la preuve de ces résultats est ce qu'on appelle la méthode de continuité, que nous allons expliquer dans le paragraphe suivant.

Considérons maintenant le cas d'une variété X vérifiant $c_1(X) > 0$. Si une telle variété admet une métrique de Kähler-Einstein, alors nécessairement il existe une métrique kählerienne ω telle que $\mathrm{Ric}(\omega) = \omega$.
Or, localement, si $\omega = \frac{i}{2}\sum \omega_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$, alors $\mathrm{Ric}(\omega) = -\frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log\det(\omega_{j\bar{k}})$ est la forme de courbure du fibré en droites $K_X^{-1} = \det T_X$ muni de la métrique $\det\omega$. Donc une condition nécessaire à l'existence de métriques de Kähler-Einstein est que K_X^{-1} soit positif, donc ample par le théorème de Kodaira. Ainsi, il faut que X soit une variété de Fano.

18. La méthode de continuité

Maintenant que le cadre est fixé, à savoir X est une variété kählerienne compacte de Fano, on peut étudier la question de l'existence de métriques Kähler-Einstein.
Par le théorème de Kodaira, on sait qu'il existe une métrique h_0 sur K_X^{-1} dont la forme de courbure $\Theta_O = \frac{i}{2\pi} D_{h_0}^2$ est définie positive. Comme $\Theta_0 \in c_1(X)$, le théorème de Calabi-Yau montre qu'il existe une métrique kählerienne $\omega_0 \in c_1(X)$ telle que $\mathrm{Ric}(\omega_0) = \Theta_0$.
Comme ω_0 et Θ_0 sont des $(1,1)$-formes ayant même classe de cohomologie, le lemme du $\partial\bar\partial$ rappelé au début de la partie VI montre l'existence d'une fonction lisse f vérifiant

$$\omega_0 = \Theta_0 + \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial f.$$

Or, nous sommes à la recherche d'une éventuelle métrique kählerienne ω dans la même classe de Kähler que ω_0, donc s'écrivant $\omega = \omega_0 + \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\varphi$, et vérifiant $\mathrm{Ric}(\omega) = \omega$. En mettant ensemble toutes ces équations, on obtient :

$$-\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial \log(\det\omega) = \omega = \Theta_0 + \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial(\varphi + f) = -\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\log(\det\omega_0) + \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial(\varphi+f),$$

ou encore sous forme condensée :

$$\partial\bar\partial\log\left(\frac{\det\omega}{\det\omega_0} + \varphi + f\right) = 0.$$

Sous cette forme, l'avantage est que le terme en log est bien défini globalement comme nous l'avons déjà remarqué dans la preuve du théorème 17.5.
D'autre part, on sait qu'il n'y a pas d'autres fonctions pluriharmoniques (même psh d'ailleurs) sur une variété compacte que les fonctions constantes. Ainsi, l'équation à résoudre se transforme en :

$$(\mathcal{E}) \qquad \log\frac{(\omega_0 + \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\varphi)^n}{\omega_0^n} + \varphi + f + C = 0$$

où C est une constante. Alors, la constante étant arbitraire, on choisit de normaliser φ en imposant la condition d'orthogonalité aux fonctions constantes : $\int_X \varphi\omega_0^n = 0$.
L'idée majeure ici, et qui constitue ce qu'on appelle la méthode de continuité, consiste, au lieu de chercher à résoudre directement cette équation, à considérer une famille $(\mathcal{E}_t)$ indexée par le compact $[0,1]$ d'équations du même type, où $\mathcal{E}_0$ a une solution triviale, et où $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$. En quelque sorte, on réalise une homotopie entre une équation triviale et notre équation.
La stratégie, divisée en deux, est de montrer que l'ensemble $\mathscr{T}$ des t tels que $\mathcal{E}_t$ admet une solution est un ouvert de $[0,1]$, puis ensuite d'étudier une condition suffisante de fermeture de $\mathscr{T}$. Rentrons dans les détails : pour $t \in [0,1]$, on considère donc l'équation suivante, dont l'inconnue est le couple (φ_t, C_t) :

$$(\mathcal{E}_t) \qquad \log\frac{(\omega_0 + \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\varphi_t)^n}{\omega_0^n} + t(\varphi_t + f) + C_t = 0, \quad \int_X \varphi_t\omega_0^n = 0$$

Il est alors clair qu'on remplit les conditions d'« homotopie »mentionnées ci-dessus, en prenant $(\varphi_0, C_0) = (0,0)$ pour l'équation $\mathcal{E}_0$.
Il nous faut maintenant voir que l'ensemble des temps pour lesquels il existe une solution est un

ouvert de $[0,1]$. Pour cela, on linéarise l'opérateur elliptique $\psi \mapsto \log \frac{(\omega_0+\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\psi)^n}{\omega_0^n} + t(\psi+f)+C_t$, ce qui donne l'opérateur linéaire :

$$T : (\psi, C) \longmapsto \frac{1}{2\pi}\Delta_{\omega_t}\psi + t\psi + C$$

où ω_t est la métrique kählerienne $\omega_t = \omega_0 + \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\varphi_t$ (implicitement, on impose dans l'équation $\mathcal{E}_t$ que ω_t soit une métrique ; sinon le terme en log devient infini, et il n'y a alors pas de solution). Peut-être pouvons dire en un mot pourquoi le linéarisé est bien celui donné : tout d'abord, tout se passe en un point donc on peut supposer que (en oubliant les facteurs $\frac{i}{2}$) : $\omega_0 = \sum dz_i \wedge d\bar z_i$. Alors, à l'ordre 1, on a

$$(\omega_0 + \partial\bar\partial\psi)^n = \omega_0^n + n\,\partial\bar\partial\psi \wedge \omega_0^{n-1} + \text{termes quadratiques}$$

Or,

$$\partial\bar\partial\psi = \sum_{p,q} \frac{\partial^2\psi}{\partial z_p d\bar z_q} dz_p \wedge d\bar z_q,$$

donc le calcul devient :

$$\begin{aligned}
\partial\bar\partial\psi \wedge \frac{\omega_0^{n-1}}{(n-1)!} &= \sum_{i=1}^n \sum_{p,q} \frac{\partial^2\psi}{\partial z_p d\bar z_q} dz_p \wedge d\bar z_q \wedge \left(\bigwedge_{j\neq i} dz_j \wedge d\bar z_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\psi}{\partial z_i d\bar z_i}\frac{\omega_0^n}{n!} \\
&= \Delta_{\omega_0}\psi\frac{\omega_0^n}{n!}
\end{aligned}$$

En multipliant par $n!$, on retombe sur le résultat annoncé, sachant que $\log(1+x) = x + O(x^2)$ quand x tend vers 0.

Il reste à voir, grâce au théorème d'inversion locale (et modulo quelques détails très bien traités dans [**Tia00**]), que T induit induit un isomorphisme entre $\mathcal{C}_\perp^{s+2}(X) \oplus \mathbb{R} \to \mathcal{C}^s(X)$, où le $\perp$ signifie l'orthogonalité aux fonctions constantes. Nous n'allons pas détailler non plus l'argument ici (il nécessite de l'analyse fonctionnelle poussée), mais seulement donner les éléments de nature géométrique permettant d'appliquer les techniques d'analyse fonctionnelle comme les estimées de Schauder.

Ainsi, il nous suffit de justifier pourquoi les valeurs propres non nulles de $-\frac{1}{2\pi}\Delta_{\omega_t}$ sont $> t$. Pour commencer, on calcule $\mathrm{Ric}(\omega_t) = \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial \log\det\omega_t = \Theta_0 + t\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial(\varphi_t+f) = \Theta_0 + t(\omega_t - \omega_0 + \omega_0 - \Theta_0) = t\omega_t + (1-t)\Theta_0$ (on remarque ici pourquoi considérer précisément l'équation $\mathcal{E}_t$ est un bon choix ; il semblerait d'ailleurs que Aubin ait été le premier à considérer l'interpolation linéaire $t(\varphi_t + f)$). Ainsi, $\mathrm{Ric}(\omega_t) > t\omega_t$ pour tout $t < 1$. Or, on dispose (d'un corollaire) de la formule de Bochner, valable pour toute 1-forme α, à une métrique riemannienne g fixée (on prendra celle donnée par ω_t bien sûr), et pour ∇ la connexion de Levi-Civita :

$$\langle \Delta\alpha, \alpha\rangle = ||\nabla\alpha||^2 + \mathrm{Ric}(\alpha,\alpha)$$

où Ric est vu ici comme la forme quadratique induite par $\mathrm{Ric}(g)$ (ou la forme hermitienne définie positive $\mathrm{Ric}(\omega_t)$ dans notre cas) à $\Lambda^1 T^*X$. Ainsi, en prenant pour α une $(0,1)$-forme non nulle, et en supposant que cette forme est dans $E^{0,1}(\lambda)$, l'espace propre de $-\frac{1}{2\pi}\Delta_{\omega_t}$ (agissant sur les $(0,1)$-formes) pour la valeur propre λ, on a :

$$|\lambda| ||\alpha||^2 \geqslant \mathrm{Ric}(\alpha, \alpha) > t||\alpha||^2$$

ce qui montre que les valeurs propres non nulles du laplacien renormalisé, agissant sur les $(0,1)$-formes, sont toutes $> t$.
Enfin, si f est une fonction propre du laplacien renormalisé, avec valeur propre λ, alors comme $\bar{\partial}$ commute à Δ (nous sommes sur une variété kählerienne compacte), on a soit $\bar{\partial} f = 0$, donc f est constante, et $\lambda = 0$, soit $\bar{\partial} f$ est vecteur propre du laplacien agissant sur les $(0,1)$-formes, et donc $|\lambda| > t$.

On passe maintenant à la condition de fermeture.
On admet qu'une condition suffisante pour la fermeture de $\mathscr{T}$ est l'existence d'une borne uniforme $||\tilde{\varphi}_t||_{\mathcal{C}^0} \leqslant \mathrm{Cte}$, pour la famille de fonctions $\tilde{\varphi}_t = t\varphi_t + C_t$. Or, la famille $(\varphi_t)_t$ est dans l'espace $\mathscr{P}_2(X)$ considéré dans la section consacrée aux fonctions quasi-psh, et donc par le corollaire 3.3, on a :

$$\sup_X \varphi_t \leqslant \mathrm{Cte} \quad \text{ donc } \quad \sup_X \tilde{\varphi}_t \leqslant C_t + \mathrm{Cte}.$$

Or, grâce à la proposition (plutôt difficile) 2.1 de [**Siu88**], on a l'inégalité suivante :

$$\sup_X (-\tilde{\varphi}_t) \leqslant (n+\epsilon) \sup_X \tilde{\varphi}_t + A_\epsilon,$$

où $\epsilon > 0$ et A_ϵ est une constante qui ne dépend que de ϵ. Ceci montre, en combinant avec l'inégalité précédente, que $\sup_X(-\tilde{\varphi}_t) \leqslant (n+\epsilon)C_t + A'_\epsilon$. Il faut donc chercher un contrôle sur les C_t, et pour cela, on part de leur « définition » : $e^{\tilde{\varphi}_t + tf} = \frac{\omega_0^n}{(\omega_0 + \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n}$, et donc :

$$\int_X \omega_0^n = \int_X \left(\omega_0 + \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi_t\right)^n = \int_X e^{-\tilde{\varphi}_t - tf}\omega_0^n.$$

L'idée est alors d'introduire un nouveau paramètre $\gamma \in]0,1[$, qu'on prendra suffisamment proche de 1 ensuite. Tout d'abord, on écrit $e^{-\tilde{\varphi}_t - tf} \leqslant \mathrm{Cte}\, e^{(\gamma + (1-\gamma))(-\tilde{\varphi}_t)} \leqslant \mathrm{Cte}\, e^{(1-\gamma)\sup_X(-\tilde{\varphi}_t)} e^{-\gamma\tilde{\varphi}_t}$. Alors, en intégrant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_X \omega_0^n &\leqslant \mathrm{Cte}\; e^{(1-\gamma)\sup_X(-\tilde{\varphi}_t)} \int_X e^{-\gamma\tilde{\varphi}_t}\omega_0^n \\ &\leqslant \mathrm{Cte}_\epsilon\; e^{(1-\gamma)(n+\epsilon)C_t} \int_X e^{-\gamma\tilde{\varphi}_t}\omega_0^n \\ &\leqslant \mathrm{Cte}_\epsilon\; e^{(1-\gamma)(n+\epsilon)C_t} e^{-\gamma C_t} \int_X e^{-\gamma t\varphi_t}\omega_0^n \end{aligned}$$

Or, $\gamma - (1-\gamma)(n+\epsilon) > 0$ si et seulement si $\gamma > \frac{n+\epsilon}{n+1+\epsilon}$. Ainsi, en prenant $\gamma \in]\frac{n}{n+1}, 1[$, la quantité précédente est > 0 pour ϵ suffisamment petit. On fixe alors un tel ϵ, dépendant tout de même de γ. En renversant les inégalités, on obtient :

$$C_t \leqslant B'_\gamma \log \int_X e^{-\gamma t\varphi_t}\omega_0^n + B''_\gamma$$

avec des constantes B'_γ, B''_γ ne dépendant plus que de γ. Ainsi, la condition de fermeture de $\mathscr{T}$ est assurée dès lors qu'il existe une borne uniforme pour les intégrales

$$\int_X e^{-\gamma t\varphi_t}\omega_0^n, \quad t\in\mathscr{T},$$

pour un certain $\gamma\in]\frac{n}{n+1},1[$.

19. Critère de Nadel sur l'existence de métriques de Kähler-Einstein

On vient d'obtenir un critère suffisant de fermeture de $\mathscr{T}$, donc d'existence de métriques de Kähler-Einstein. Seulement, ce critère n'est pas forcément très utilisable tel quel, et nous allons donner une version géométrique de critère, qui est sa reformulation en terme d'idéaux multiplicateurs. Ensuite, grâce au théorème d'annulation de Nadel, nous donnerons d'autres critères géométriques (ou cohomologiques, selon le point de vue) d'existence de métriques de Kähler-Einstein.
Voici l'énoncé :

Théorème 19.1 **(Critère d'existence de métriques de Kähler-Einstein)**
Soit X une variété kählerienne compacte de Fano, de dimension n. Soit G un sous-groupe compact du groupe $\mathrm{Aut}(X)$ *des automorphismes complexes de X. On suppose que X n'admet pas de métrique de Kähler-Einstein G-invariante ; alors nécessairement, K_X^{-1} possède une métrique hermitienne singulière G-invariante $h=h_0e^{-\varphi}$ (avec h_0 métrique lisse G-invariante, et φ une fonction G-invariante intégrable.) telle que :*

(1) *h a un courant de courbure semi-positif :*

$$\Theta_h=-\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\log h=\Theta_0+\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\varphi\geqslant 0.$$

(2) *Pour tout $\gamma\in]\frac{n}{n+1},1[$, l'idéal multiplicateur $\mathscr{I}(\gamma\varphi)$ n'est pas trivial : $0\subsetneq\mathscr{I}(\gamma\varphi)\subsetneq\mathcal{O}_X$.*

Démonstration. — X est de Fano, donc il existe une métrique kählerienne $\omega_0=\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\log h_0^{-1}$ (h_0 correspond à une métrique hermitienne sur K_X à courbure négative). Quitte à moyenner h_0, on peut supposer que ω_0 est G-invariante. Comme on cherche par l'équation $\mathcal{E}_t$ des métriques G-invariantes $\omega_t=\omega_0+\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\varphi_t$, on peut supposer que les φ_t sont également G-invariantes.
D'après l'hypothèse, $\mathscr{T}$ n'est pas fermé, donc il existe $t_0\in[0,1]$, appartenant à $\bar{\mathscr{T}}\smallsetminus\mathscr{T}$, et une suite $t_\nu\in\mathscr{T}$ tendant vers t_0, et vérifiant pour tout $\gamma\in]\frac{n}{n+1},1[$, la condition :

$$\lim_{k\to+\infty}\int_X e^{-\gamma t_\nu\varphi_{t_\nu}}\omega_0^n=+\infty.$$

Or, $(\varphi_{t_\nu})_\nu$ est une suite d'éléments de $\mathscr{P}_2(X)$, donc par le théorème 3.2 il existe une sous-suite $(\varphi_{t_{\nu(p)}})_p$ qui converge dans $L^1(X)$ vers une fonction φ. Ainsi, $\Theta_{(p)}=\omega_0+\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\varphi_{t_{\nu(p)}}$ converge faiblement vers $\Theta=\omega_0+\frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial\varphi\geqslant 0$, ce qui montre le premier point.
On peut ensuite appliquer le théorème de semi-continuité 8.11 à φ et au compact X tout entier (φ étant quasi-psh, on écrit $\varphi=\psi+f$ où ψ est psh et f lisse, et on applique le théorème à ψ, puis on

peut ensuite rajouter des facteurs e^{-2cf} dans les intégrales, qui ne jouent aucun rôle bien sûr), ce qui garantit que

$$\int_X e^{-\gamma t_0 \varphi_{t_0}} \omega_0^n = +\infty, \quad \text{pour } \gamma \text{ vérifiant} \quad \frac{n}{n+1} < \gamma < 1. \tag{19.1}$$

Cela mérite peut-être une brève justification : supposons par l'absurde qu'une de ces intégrales soit finie pour un certain $\gamma \in]\frac{n}{n+1}, 1[$. Alors on aurait $2c_X(\varphi) \geqslant \gamma t_0$, mais pour $c < c_X(\varphi)$, on a que $e^{-2c\varphi_{t_{\nu(p)}}}$ converge en norme 1 vers $e^{-2c\varphi}$, donc il y a une borne pour p assez grand : $||e^{-2c\varphi_{t_{\nu(p)}}}||_1 \leqslant M(c)$. On choisit alors $n/(n+1) < \gamma'' < \gamma' < \gamma$, et alors, pour p assez grand, on a $\gamma'' t_{\nu(p)} < \gamma' t_0 < 2c_X(\varphi)$, et donc $||e^{-\gamma'' t_{\nu(p)} \varphi_{t_{\nu(p)}}}||_1 \leqslant M(\gamma')$, ce qui contredit (19.1).
Ainsi, comme $t_0 \leqslant 1$, on a encore $\int_X e^{-\gamma \varphi_{t_0}} \omega_0^n = +\infty$ pour tout $\gamma \in]\frac{n}{n+1}, 1[$, ce qui montre $\mathscr{I}(\gamma\varphi) \neq \mathcal{O}_X$. Enfin, pour voir que l'idéal multiplicateur n'est pas nul, on choisit un point x tel que $\varphi(x) \neq -\infty$, et on applique le théorème d'Ohsawa-Takegoshi à $\{x\}$ (vue comme sous-variété d'une petite boule autour de x) et à la fonction 1, ce qui conclut. □

Pour résumer, nous avons en fait deux critères, qui ont été regroupés en un seul pour plus de concision.
Le premier est utile lorsqu'il existe de gros groupes d'automorphismes : alors, l'absence de métrique de Kähler-Einstein (en particulier l'absence de telles métriques G-invariantes) implique l'existence d'une métrique G-invariante à courant de courbure semi-positif sur K_X^{-1}.
Le second, comme nous allons le voir dans les résultats suivants, est de nature géométrique : l'absence de métriques de Kähler-Einstein implique l'existence d'une famille de faisceaux d'idéaux non triviaux. Le point clé est que les faisceaux en question ont des propriétés très particulières, et en considérant leur support, on va obtenir des sous-schémas assez particuliers. C'est l'objet du corollaire suivant :

Corollaire 19.2. — *Soient X, G, h, φ comme précédemment. Alors, pour tout $\gamma \in]\frac{n}{n+1}, 1[$, on a :*
(*i*) *Le faisceau d'idéaux multiplicateurs $\mathscr{I}(\gamma\varphi)$ vérifie*

$$H^q(X, \mathscr{I}(\gamma\varphi)) = 0 \quad \forall q \geqslant 1.$$

(*ii*) *Le sous-schéma fermé V_γ associé au faisceau structural $\mathcal{O}_{V_\gamma} = \mathcal{O}_X/\mathscr{I}(\gamma\varphi)$ est non vide, distinct de X, G-invariant, et vérifie :*

$$H^q(V_\gamma, \mathcal{O}_{V_\gamma}) = \begin{cases} \mathbb{C} \text{ si } q = 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème de Nadel au fibré en droites $L = K_X^{-1}$, muni de ma métrique hermitienne $h_\gamma = h_0 e^{-\gamma\varphi}$, car la courbure de cette métrique est $\Theta_\gamma = \Theta_0 + \gamma \frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi = \gamma\Theta_h + (1-\gamma)\Theta_0 \geqslant (1-\gamma)\omega_0 > 0$.
Quant au second point, on commence par écrire la suite exacte

$$0 \to \mathscr{I}(\gamma\varphi) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{V_\gamma} \to 0$$

en remarquant que d'une part,

$$H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \forall q \geqslant 1,$$

grâce au théorème d'annulation de Kodaira appliqué à $L = K_X^{-1}$ ample (X est de Fano) ; d'autre part,

$$H^0(X, \mathscr{I}(\gamma\varphi)) = 0$$

car comme nous l'avons vu dans la preuve du critère de Nadel, $\int_X e^{-\gamma\varphi}\omega_0^n = +\infty$, donc les constantes non nulles ne sont pas dans $H^0(X, \mathscr{I}(\gamma\varphi))$; et enfin,

$$H^q(X, \mathscr{I}(\gamma\varphi)) = 0 \quad \forall q \geqslant 1$$

par le premier point. □

A partir de ce résultat, on sait décrire beaucoup de cas où le critère s'applique pour donner l'existence de métriques de Kähler-Einstein. Les conditions peuvent alors porter sur la dimension (en particulier $2, 3$), sur le groupe de Picard (on demande qu'il soit engendré par K_X^{-1}), ou encore sur le groupe G choisi (orbites suffisamment grandes, pas de morphismes de G vers $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{A}_5, \mathfrak{S}_5$, ...). Pour ce genre de résultats, on renvoie à [**Nad90**], ou à [**DK01**] pour une approche faisant intervenir des nombres d'intersection.

Pour finir, voici un critère garantissant l'absence de sous-schémas du type V_γ de dimension 0 :

Proposition 19.3. — *Tous les sous-schémas V_γ sont connexes. En particulier, si G n'admet pas de points fixes, alors V_γ ne peut être de dimension* 0.

Démonstration. — Le premier point est une reformulation de l'égalité $H^0(V_\gamma, \mathcal{O}_{V_\gamma})$.

Quant au second, si $\dim V_\gamma = 0$, alors V_γ est réduit à un point x. Mais alors, on sait que l'action de G sur X se restreint à V_γ : en effet, si $x \in V_\gamma$, alors pour tout voisinage U de x, on a $\int_U e^{-\gamma\varphi}\omega_0^n = +\infty$, et comme φ, ω_0 sont G-invariantes, on a aussi pour tout $g \in G$, grâce à la formule de changement de variable : $\int_{g(U)} e^{-\gamma\varphi}\omega_0^n = +\infty$, et donc $g.x \in V_\gamma$.

D'autre part, il existe $g \in G$ tel que $g.x \neq x$, mais on doit aussi avoir $g.x \in V_\gamma$, c'est absurde. □

Références

[AM04] E. Amar & E. Matheron – *Analyse Complexe*, Cassini, 2004.

[Ber95] B. Berndtsson – « L^2 methods for the $\bar{\partial}$-equation », 1995, Lecture Notes.

[Ber96] ———, « The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* (1996), p. 1083–1094.

[Ber05] ———, « Integral formulas and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem », *Science in China Series A : Mathematics.* **48** (2005), p. 61–73.

[Bes08] A. Besse – *Einstein Manifolds*, Springer, 2008.

[BFJ08] S. Boucksom, C. Favre & M. Jonsson – « Valuations and plurisubharmonic singularities », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **44** (2008), p. 449–494.

[DBIP96] J.-P. Demailly, J. Bertin, L. Illusie & C. Peters – *Introduction à la théorie de Hodge*, Panorama et Synthèses, vol. 3, Soc. Math. de France, 1996.

[DEL00] J.-P. Demailly, L. Ein & R. Lazarsfeld – « A subadditivity property of multiplier ideals », *Michigan Math. J.* **48** (2000), p. 137–156.

[Dem] J.-P. Demailly – « Complex Analytic and Algebraic Geometry », Livre en préparation.

[Dem92] ———, « Courants positifs et théorie de l'intersection », *Gazette des mathématiciens* **53** (1992), p. 131–158.

[Dem01] ———, *Multiplier ideal sheaves and analytic methods in algebraic geometry*, Lecture Notes, vol. 6, ICTP, 2001.

[DK01] J.-P. Demailly & J. Kollár – « Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **34** (2001), p. 525–556.

[Eis10] E. Eisenstein – « Generalizations of the restriction theorem for multiplier ideals », *arXiv :1001 :2841* (2010).

[FJ05] C. Favre & M. Jonsson – « Valuations and Multiplier Ideals », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (2005), p. 655–684.

[How01] J. Howald – « Multiplier ideals of monomial ideals », *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), p. 2665–2671.

[Hö73] L. Hörmander – *An Introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland Math. Libr., 1973.

[Hö94] ———, *Notions of convexity*, Birkhäuser, 1994.

[Kli91] M. Klimek – *Pluripotential Theory*, Oxford Univ. Press, 1991.

[Kra92] S. Krantz – *Function theory of several complex variables*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1992.

[Laz04] R. Lazarsfeld – *Positivity in Algebraic Geometry II*, Springer, 2004.

[Lel68] P. Lelong – *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris, Gordon & Breach, New York, 1968.

[Nad90] A. Nadel – « Multiplier ideal sheaves and existence of Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature », *Ann. of Math.* **132** (1990), p. 549–596.

[RV73] A. Roberts & D. Varberg – *Convex Functions*, Academic Press, 1973.

[Siu88] Y.-T. Siu – « The existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with positive anticanonical line bundle and a suitable finite symmetry group », *Ann. of Math.* **127** (1988), p. 585–627.

[Tak07] S. Takagi – « Adjoint ideals along closed subvarieties of higher codimension », *arXiv :0711.2342* (2007).

[Tia00] G. Tian – *Canonical metrics in Kähler geometry*, Birkhäuser, 2000.

[Voi02] C. Voisin – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Soc. Math. de France, 2002.

Henri Guenancia