Master 2 UPS, 2018

05/12/2018 H. Guenancia

Examen du cours "Introduction aux surfaces de Riemann"

durée: 3h

Les notes de cours sont interdites.
Les exercices sont indépendants les uns des autres, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1 – *Sphère de Riemann.*

1. Soit L un fibré en droites holomorphe sur $\mathbb{P}^1$. Calculer $\dim H^0(X, L)$ en fonction de $\deg(L)$ seulement.
2. Montrer que l'application degré

$$\deg : \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1)/\sim \ \longrightarrow \ \mathbb{Z}$$

induit un isomorphisme entre le groupe des diviseurs modulo équivalence linéaire et $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 – *Surfaces de genre* 1.

Soit X une surface de Riemann compacte de genre 1. Le but de l'exercice est de montrer que X est biholomorphe à un tore complexe.

1. Énoncer le Théorème de Riemann-Roch pour X.
2. Donner le degré de K_X.
3. Montrer qu'il existe sur X une 1-forme holomorphe ω qui ne s'annule pas.
4. Soit $\pi : Y \to X$ le revêtement universel (holomorphe) de X, et soit $y_0 \in Y$ un point fixe. Soit γ_y un chemin de y_0 à $y \in Y$. Montrer que l'intégrale

$$\int_{\gamma_y} \pi^* \omega$$

ne dépend que de y_0 et y et pas du chemin γ_y choisi.
5. Conclure.

Exercice 3 – *Le système canonique est sans point base.*

Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geqslant 1$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $x \in X$, il existe $s \in H^0(X, K_X)$ telle que $s(x) \neq 0$.

1. Soit D un diviseur linéairement équivalent à K_X. Calculer $h^0(D)$.
2. Montrer que $h^0((x)) = 1$, où (x) est le diviseur supporté en x avec coefficient 1.
3. En utilisant le Théorème de Riemann-Roch, calculer $h^0(D - (x))$. Conclure.

Exercice 4 – *Annulation de la cohomologie.*

Soit X une surface de Riemann compacte, et soit D un diviseur de degré $\deg(D) > 0$. On fixe un point $x \in X$.

1. Rappeler l'argument montrant que pour n assez grand indépendant de x, il existe $s \in H^0(X, \mathscr{O}_X(nD))$ telle que $s(x) \neq 0$.
2. Montrer que pour n assez grand, on a $H^1(X, \mathscr{O}_X(nD)) = 0$.
3. On définit deux préfaisceaux $\mathscr{I}_x \subset \mathscr{O}_X$ et $\mathscr{O}_x$ sur X en posant, pour tout ouvert $U \subset X$:

$$\mathscr{I}_x(U) = \{f \in \mathscr{O}_X(U), f(x) = 0\}$$

puis

$$\mathscr{O}_x(U) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   a) Montrer que $\mathscr{I}_x$ et $\mathscr{O}_x$ sont des faisceaux.
   b) Montrer qu'il existe une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathscr{I}_x \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_x \longrightarrow 0.$$

   c) Montrer que pour tout fibré en droites $L \to X$, on a un isomorphisme de faisceaux $\mathscr{O}_x \otimes L \simeq \mathscr{O}_x$.
   d) On admet que la tensorisation par $\mathscr{O}_X(nD)$ préserve la suite exacte. Montrer que pour n assez grand, l'application induite sur les sections globales

$$H^0(X, \mathscr{O}_X(nD)) \longrightarrow H^0(X, \mathscr{O}_x \otimes \mathscr{O}_X(nD)) \simeq \mathbb{C}$$

   est surjective.
   e) En utilisant la suite exacte longue en cohomologie, déduire des questions précédentes que pour n assez grand, on a

$$H^1(X, \mathscr{I}_x \otimes \mathscr{O}_X(nD)) = 0.$$

Exercice 5 – *Fonctions theta.*

Soit $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ un réseau du plan complexe avec $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(n^2\tau + 2nz)}.$$

1. Montrer que θ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Calculer $\theta(z+1)$ et $\theta(z+\tau)$ en fonction de $\theta(z)$.
3. En déduire que θ s'annule sur $\Sigma := 1/2 + \tau/2 + \Lambda$.
4. Soit $p \in \mathbb{C}$ et γ_p le parallélogramme fondamental de côtés $p, p+1, p+\tau, p+1+\tau$. Calculer, pour un p à préciser, l'intégrale

$$\int_{\gamma_p} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz$$

   et en déduire que $\theta^{-1}(0) = \Sigma$ et que tous les zéros de θ sont simples.

5. On note, pour $x \in \mathbb{C}$, $\theta^{(x)}(z) := \theta(z - x - 1/2 - \tau/2)$. Pour des nombres complexes $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{y_1, \ldots, y_m\}$, on pose

$$R(z) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{j=1}^{m} \theta^{(y_j)}(z)}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les points (x_i) et (y_j) pour que R induise une fonction méromorphe invariante par translation par Λ. Pour de tels points, déterminer le diviseur $\mathrm{div}(R)$.

6. Soit $A : \mathrm{Div}(X) \to X$ définie sur l'espace des diviseurs de X par $A(\sum n_i(x_i)) := \sum n_i \cdot x_i$ où l'addition sur X provient de $\mathbb{C}$. On rappelle que pour toute $f \in \mathcal{M}_X(X)$, on a $A(\mathrm{div}(f)) = 0$.
   a) Montrer la réciproque, i.e. montrer que tout diviseur D sur X tel que $A(D) = 0$ est le diviseur d'une fonction méromorphe.
   b) Montrer que le corps $\mathcal{M}_X(X)$ est le corps engendré par les fonctions theta.

Exercice 6 – *Corps des fonctions méromorphes.*

Soit X une surface de Riemann compacte. On note $M := \mathscr{M}_X(X)$ le corps des fonctions méromorphes sur X. Le but de ce exercice est de montrer que M est une extension algébrique finie de $\mathbb{C}(f)$ pour une certaine fonction méromorphe $f \in M \backslash \mathbb{C}$.

1. Calculer M pour $X = \mathbb{P}^1$.
2. Supposons par l'absurde que $f, g \in M$ soient deux fonctions méromorphes algébriquement indépendantes.
   a) Montrer qu'il existe un diviseur effectif D telles que $f, g \in H^0(X, \mathscr{O}_X(D))$.
   b) Montrer que lorsque $m \to +\infty$, on a $\dim H^0(X, \mathscr{O}_X(mD)) = O(m)$.
   c) Calculer $\dim \mathrm{Vect}(f^i g^j, i + j \leqslant m)$ et conclure.
3. Soit $f \in M \backslash \mathbb{C}$; on note $\mathbb{C}(f)$ l'ensemble des fractions rationnelles en f; c'est un sous-corps de M isomorphe à $\mathbb{C}(t)$. On veut montrer que le degré $[M : \mathbb{C}(f)]$ est fini, c'est-à-dire qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que tout élément $g \in M$ satisfait une équation polynomiale de degré au plus d à coefficients dans $\mathbb{C}(f)$.
   a) Soit $g \in M$. Montrer qu'il existe un polynôme $r = r(f)$ en f tel que les pôles de $r(f) \cdot g$ sont tous des pôles de f également.
   b) Soient $g_1, \ldots, g_k \in M$ linéairement indépendants sur $\mathbb{C}(f)$, et soit D le diviseur (effectif) des pôles de f. En utilisant la question précédente, construire des éléments $h_1, \ldots, h_k \in H^0(X, \mathscr{O}_X(m_0 D))$ pour un certain $m_0 > 0$ qui soient linéairement indépendants sur $\mathbb{C}(f)$. En déduire l'inégalité

   $$\dim H^0(X, \mathscr{O}_X(mD)) \geqslant (m - m_0 + 1)k$$

   pour tout $m \geqslant m_0$.
   c) Conclure.
   d) *Bonus*: Montrer que $[M : \mathbb{C}(f)] \leqslant \deg(D)$.