

Introduction aux surfaces de Riemann

Henri Guenancia

19 novembre 2018

Les références pour ce cours sont [1, 4, 5].

1 Surfaces de Riemann, morphismes

Une surface de Riemann est une variété topologique connexe X de dimension deux muni d'un atlas $(U_\alpha, \phi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} V_\alpha \subset \mathbb{C})$ de cartes complexes compatibles, i.e.

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont des biholomorphismes.

Exemple 1.1. Les trois exemples les plus fondamentaux sont les suivants.

1. Ouverts de $\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ muni de deux ouverts $\mathbb{C}$ et $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}$ et du changement de coordonnées $w = 1/z$ sur $\mathbb{C}^*$.
3. $\mathbb{C}/\Lambda$, muni d'une projection $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ avec des cartes U telles que $p|_{p^{-1}(U)}$ est isomorphisme, d'où des changements de coordonnées $z \mapsto z + \lambda, \lambda \in \Lambda$.

Définition 1.2. Un morphisme entre surfaces de Riemann est une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que, lue dans des cartes complexes, f est holomorphe.

Une fonction holomorphe sur une surface de Riemann X est un morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.

Exemple 1.3. Toute fonction holomorphe $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ est constante car elle induit une fonction entière bornée (car d'image incluse dans le compact $f(\mathbb{P}^1)$).

Exemple 1.4. La projection $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ est holomorphe. Par conséquent, toute fonction holomorphe sur un tore $f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ est constante car elle induit une fonction holomorphe $f \circ \pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ d'image incluse dans le compact $f(\mathbb{C}/\Lambda)$.

Définition 1.5. Une fonction méromorphe $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ sur une surface de Riemann compacte est la donnée d'un ensemble discret $\Sigma \subset X$ et d'une fonction holomorphe f sur $X \setminus \Sigma$ telle que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \Sigma \\ x \in X \setminus \Sigma}} |f(x)| = +\infty.$$

Exemple 1.6. Toute fonction polynômiale peut être vue comme fonction méromorphe sur $\mathbb{P}^1$ avec $\Sigma = \{\infty\}$.

Proposition 1.7. Soit X une surface de Riemann et $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe dont l'ensemble des pôles est $\Sigma \subset X$. La fonction $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ définie par

$$\bar{f}|_{X \setminus \Sigma} \equiv f \quad \text{et} \quad \bar{f}|_{\Sigma} \equiv \infty$$

est un morphisme de surfaces de Riemann.

Preuve. Il suffit de se placer sur un voisinage U d'un point x de Σ envoyé sur 0 par une carte locale. Comme f est méromorphe, on peut choisir U de sorte que $f(U \setminus \{x\}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et alors, en utilisant la carte w de $\mathbb{P}^1$, la fonction $f|_{U \setminus \{x\}}$ s'écrit $z \mapsto 1/f(z)$ dans un voisinage épointé de 0. Cette fonction est holomorphe et tend vers 0 en 0, donc se prolonge de manière holomorphe et coïncide alors avec $\bar{f}$. $\square$

2 Revêtements

Théorème 2.1 (Principe des zéros isolés). Soit $f, g : X \rightarrow Y$ deux morphismes entre surfaces de Riemann. L'ensemble $\{f = g\} \subset X$ est soit discret, soit X tout entier.

Preuve. Soit $E := \{f = g\}$. Si E a un point d'accumulation, alors il existe une carte complexe $U \subset X$ telle que $U \cap E$ a un point d'accumulation. On peut alors se ramener au cas standard qui montre que $f|_U = g|_U$. L'ensemble $E' = \{x \in X; f = g \text{ sur un voisinage de } x\}$ est bien sûr ouvert, mais il est fermé par l'argument précédent. Il est donc soit vide soit l'espace X tout entier. $\square$

Théorème 2.2 (Forme normale). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme non-constant entre surfaces de Riemann. Alors pour tout $x \in X$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et deux cartes complexes $\phi : U \ni x \rightarrow V \ni 0$ et $\psi : U' \ni f(x) \rightarrow V' \ni 0$ telle que $\psi \circ f|_U \circ \phi^{-1}$ coïncide avec l'application $z \mapsto z^m$.

Preuve. Par le principe des zéros isolés, on peut se ramener au cas local où f est définie sur un disque D et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors on peut écrire $f(z) = z^m \tilde{h}(z)$ avec $h(0) \neq 0$. Comme D est simplement connexe, il existe une fonction holomorphe h sur D telle que $h^m = \tilde{h}$. On pose $g(z) = zh(z)$ de sorte que $f = g^m$. Comme $g'(0) \neq 0$, g induit un biholomorphisme sur son image en restriction à un petit voisinage de 0. Dans la nouvelle carte induite par g , f a la forme voulue. $\square$

Remarque 2.3. L'entier m est uniquement déterminé par la donnée de F et x et se caractérise comme le nombre de préimages dans un petit voisinage de x de tout point y suffisamment proche (mais différent) de $f(x)$.

Le résultat suivant liste les applications du théorème de la forme normale des morphismes :

Corollaire 2.4. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme non-constant entre surfaces de Riemann.

1. L'application f est ouverte.

2. Si f est injective, c'est un biholomorphisme sur son image.

3. Si X est compacte, alors Y aussi et f est surjective.

Supposons maintenant que $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe.

4. Si f est non-constante, l'application $|f|$ n'atteint pas son maximum.

5. Si X est compacte, alors f est constante.

Preuve. 1. C'est une propriété locale, invariante par homéomorphisme, et satisfaite par $z \mapsto z^m$.

2., l'injectivité implique $m = 1$ donc f est un biholomorphisme local, et donc global par injectivité.

3. L'image $f(X)$ est ouverte et fermée car compacte, donc c'est Y tout entier.

4. Si $|f|$ atteint son maximum en un point $x \in X$, alors l'ouvert $f(X)$ est contenu dans $\{|z| \leq |f(x)|\}$ mais contient un point du bord de ce disque. C'est impossible.

5. Si X est compacte, $|f|$ atteint forcément son maximum, et on conclut par 4. $\square$

Le résultat suivant est élémentaire.

Proposition 2.5. Soit $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe, soit $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme associé et soit $x \in X$. Alors

1. Si x n'est pas un pôle de f , on a $m_x(\bar{f}) = \text{ord}_x(f - f(x))$.

2. Si x est un pôle de f , on a $m_x(\bar{f}) = \text{ord}_x(f)$.

Définition 2.6. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme non-constant entre surfaces de Riemann compactes et soit $y \in Y$. On définit

$$d_y(f) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} m_x(f).$$

Ce nombre est bien défini car les fibres de f sont discrètes, donc finies car X est compacte. Par ailleurs, on sait que les points de multiplicité supérieure à 1 sont isolés dans X donc finis. Par conséquent, il existe un ensemble fini $B \subset Y$ tel que pour tout $y \in Y \setminus B$, $d_y(f) = \#f^{-1}(y)$.

Exemple 2.7. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^m$. Alors $f^{-1}(0) = \{0\}$ et $m_0(f) = m$ par définition. De plus, f est un biholomorphisme local en tout point de $\mathbb{C}^*$ car sa dérivée y est non-nulle. Ainsi $m_x(f) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{C}^*$. Comme

$$f^{-1}(z) = \{|z|, |z|e^{\frac{2i\pi}{m}}, \dots, |z|e^{\frac{2i(m-1)\pi}{m}}\},$$

on a $d_z(f) = m$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 2.8 (Degré d'un morphisme). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme non-constant entre surfaces de Riemann compactes. Alors $d_y(f)$ ne dépend pas de $y \in Y$.

Preuve. Il suffit de voir que $y \mapsto d_y(f)$ est localement constant. Soit $y \in Y$, et soit $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $m_{x_i}(f) = m_i$. On choisit des petits ouverts U_i deux à deux disjoints tels que en restriction à U_i , f soit composée à $z \mapsto z^{m_i}$. Soit $U := \cup_i U_i$. D'après l'Exemple 2.7, on a pour tout y' proche de y

$$\sum_{x \in f^{-1}(y') \cap U} m_x(f) = \sum_{i=1}^n m_i = d_y(f).$$

Si on peut montrer que $f^{-1}(y') \subset U$ pour y' assez petit, alors le théorème sera prouvé. Si ce n'était pas vrai, on pourrait trouver une suite de points $z_k \in X \setminus U$ tels que $f(z_k) \rightarrow y$. Par compacité, on peut extraire une sous-suite convergente vers $z_\infty \in X \setminus U$ satisfaisant alors $f(z_\infty) = y$, contradiction. $\square$

Corollaire 2.9. *Soit $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe non-constante sur une surface de Riemann X compacte. Alors*

$$\sum_{x \in X} \text{ord}_x(f) = 0.$$

Preuve. Soit $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme induit par f . D'après la Proposition 2.5, la somme est égale à $d_0(\bar{f}) - d_\infty(f)$, qui est nul d'après le Théorème 2.8. $\square$

Le Théorème 2.8 justifie la définition suivante :

Définition 2.10. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme non-constant entre surfaces de Riemann compactes. On définit le degré de f , noté $d(f)$, comme le nombre $d_y(f)$ pour n'importe quel $y \in Y$.

Théorème 2.11. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme non-constant entre surfaces de Riemann compactes. Si $d(f) = 1$, alors f est un isomorphisme.*

Preuve. Par constance du degré, on a $d_y(f) = 1$ pour tout $y \in Y$, et ainsi f est injective par la propriété 2. du Corollaire 2.4, donc c'est un isomorphisme. $\square$

Corollaire 2.12. *Soit $f : X \dashrightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe non-constante sur une surface de Riemann compacte X . On suppose que f a un seul pôle simple. Alors le morphisme $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ induit un isomorphisme $X \simeq \mathbb{P}^1$.*

Preuve. Le fait que f ait un seul pôle simple implique que $d_\infty(\bar{f}) = 1$, et donc $d(f) = 1$. Le résultat est alors une conséquence du Théorème 2.11. $\square$

3 Formes différentielles

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1. Une 1-forme holomorphe sur une surface de Riemann X est la donnée d'expressions $\omega = f(z)dz$ sur chaque ouvert de coordonnées vérifiant la règle de transformation suivante

$$g(w)dw = g(w(z)) \cdot w'(z) \cdot dz.$$

On note $\Omega_X^1(X)$ l'ensemble des 1-formes holomorphes sur X . On étend la définition au cas méromorphe.

Définition 3.2 (Ordre, degré). Soit ω une 1-forme méromorphe sur une surface de Riemann X . On définit

$$\text{ord}_x(\omega) := \text{ord}_x f.$$

Ce nombre est indépendant du choix des coordonnées. Si X est compacte, on définit le degré de ω par

$$\deg(\omega) := \sum_{x \in X} \text{ord}_x(\omega).$$

Exemple 3.3. Un calcul facile montre qu'il n'existe pas de forme holomorphe non nulle sur $\mathbb{P}^1$. En revanche, l'expression $\omega := \{-dz/z^2, dw\}$ définit une forme méromorphe sur $\mathbb{P}^1$.

Exemple 3.4. La 1-forme dz définie sur $\mathbb{C}$ est invariante par les opérations $z \mapsto z + \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Elle induit ainsi une 1-forme holomorphe sur $\mathbb{C}/\Lambda$.

Formes $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Définition de 1-formes $\mathcal{C}^\infty$ $\omega = f(z, \bar{z})dz + g(z, \bar{z})d\bar{z}$. Règle de transformation

$$f(w, \bar{w})dw + g(w, \bar{w})d\bar{w} = f(w(z), \overline{w(z)}) \cdot w'(z) \cdot dz + g(w(z), \overline{w(z)}) \cdot \overline{w'(z)} \cdot d\bar{z}.$$

On note $\omega \in \Omega_{X, \mathbb{C}}^1(X)$. Types $(1, 0)$ et $(0, 1)$, notation associée $\Omega_X^{1,0}$ et $\Omega_X^{0,1}$. Ex : Une forme holomorphe est de type $(1, 0)$. Opérateurs $\partial, \bar{\partial}, d$ définis sur $\mathcal{C}^\infty(X)$; f holomorphe ssi $\bar{\partial}f = 0$. Règle de Leibniz. Définition de forme exacte.

Définition de 2-formes $\mathcal{C}^\infty$ $\eta = f(z, \bar{z})dz \wedge d\bar{z}$, règle de transformation

$$g(w, \bar{w})dw \wedge d\bar{w} = g(w(z), \overline{w(z)}) \cdot |w'(z)|^2 \cdot dz \wedge d\bar{z}$$

Remarque 3.5. La quantité $\frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = dx \wedge dy$ est l'élément de volume euclidien sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Définition 3.6. Le wedge product de deux 1-formes est défini par

$$(f_1 dz + g_1 d\bar{z}) \wedge (f_2 dz + g_2 d\bar{z}) := (f_1 g_2 - g_1 f_2) dz \wedge d\bar{z}.$$

Définition 3.7. On définit les opérateurs $\partial, \bar{\partial}, d$ sur les 1-formes de la manière suivante

$$\partial(f dz + g d\bar{z}) := \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}; \quad \bar{\partial}(f dz + g d\bar{z}) := -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}; \quad d = \partial + \bar{\partial}.$$

Proposition 3.8. Si ω est une 1-forme de type $(1, 0)$,

$$d\omega = 0 \iff \bar{\partial}\omega = 0 \iff \omega \text{ est holomorphe.}$$

Exemple 3.9. Le résultat de la Proposition 3.8 devient faux si ω n'est pas de type $(1, 0)$, comme le montre l'exemple donné par $\omega = d\bar{z}$.

Proposition 3.10. On a les relations suivantes

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = d^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial.$$

Conséquence : une forme exacte est fermée. La réciproque est fautive, ex : dz/z sur $\mathbb{C}^*$.

3.2 Intégration

Intégrale d'une 1-forme $\omega = f dz + g d\bar{z}$ le long d'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$

$$\int_{\gamma} \omega := \int_0^1 \left(f(z(t), \overline{z(t)}) z'(t) + g(z(t), \overline{z(t)}) \overline{z'(t)} \right) dt$$

si $\text{Im}(\gamma)$ est incluse dans un ouvert de coordonnées z , avec $z(t) := z(\gamma(t))$. Nombre indépendant du choix de la carte ; dans le cas général, on sous-divise le chemin pour se ramener au cas précédent.

Définition 3.11. Soit ω une 1-forme méromorphe $\omega = f(z) dz$ sur X . On définit $\text{Res}_x(\omega) := \text{Res}_x(f)$.

Pour vérifier que ce nombre est indépendant de la représentation de ω , on montre qu'il coïncide avec $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \omega$ pour γ petit lacet autour de x , et cette quantité est intrinsèque à ω . Si f est méromorphe, $x \in X$, alors $\text{Res}_x(\frac{df}{f}) = \text{ord}_x(f)$.

Intégrale d'une 2-forme $\eta = f(z, \bar{z}) dz \wedge d\bar{z}$ définie localement ; a un sens global.

Théorème 3.12 (Formule de Stokes). Si ω est une 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ sur un domaine $D \subset X$, alors

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$$

Preuve. On commence par le cas où D est un triangle (calcul explicite), qui implique le cas général. $\square$

Une conséquence est la suivante :

Théorème 3.13 (Théorème des résidus). Si ω est une 1-forme méromorphe sur une surface de Riemann compacte X , alors

$$\sum_{x \in X} \text{Res}_x(\omega) = 0.$$

Preuve. Choisir des petits disques fermés U_i autour de chaque pôle x_i de ω , et appliquer Stokes à ω , holomorphe et donc fermée sur $D = X \setminus \cup U_i$. $\square$

Autre corollaire, vu également par la théorie du degré

Théorème 3.14. Si f est une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte X , alors

$$\sum_{x \in X} \text{ord}_x(f) = 0.$$

Preuve. On applique le théorème des résidus à $\omega = df/f$. $\square$

Si ω, ω' sont deux formes méromorphes non-nulles sur une surface de Riemann X , alors il existe une fonction méromorphe h sur X telle que $\omega' = h \cdot \omega$. Pour voir ceci, il suffit d'observer que le quotient $g(z)/f(z)$ est indépendant du choix de coordonnées lorsqu'on écrit $\omega = f(z) dz$ et $\omega' = g(z) dz$. Par conséquent, le Théorème 3.14 implique le résultat suivant :

Proposition 3.15. *Deux formes méromorphes non-nulles sur une surface de Riemann compacte ont même degré.*

Étant donnée la Proposition 3.15, on déduit des Exemples 3.3-3.4 ce qui suit.

Exemple 3.16. Si ω est une 1-forme méromorphe non-nulle sur $\mathbb{P}^1$, alors

$$\sum_{x \in \mathbb{P}^1} \text{ord}_x(\omega) = -2.$$

En particulier, il n'existe pas de 1-forme holomorphe non-nulle sur $\mathbb{P}^1$, ou même de 1-forme méromorphe avec un seul pôle simple.

Exemple 3.17. Si ω est une 1-forme méromorphe non-nulle sur un tore $\mathbb{C}/\Lambda$, alors $\sum_{x \in \mathbb{C}/\Lambda} \text{ord}_x(\omega) = 0$.

3.3 Pull-back

Soit $F : X \rightarrow Y$ un morphisme entre surfaces de Riemann, et $\omega = f dz + g d\bar{z}$ une 1-forme $\mathcal{C}^\infty$. On définit la 1-forme $F^*\omega$ sur X par

$$F^*\omega := f(F(w), \overline{F(w)}) \cdot F'(w) \cdot dw + g(F(w), \overline{F(w)}) \cdot \overline{F'(w)} \cdot d\bar{w}.$$

Cette opération est bien définie ; le pull-back par un morphisme préserve l'holomorphicité, la méromorphie, le type. Si $\eta = f dz \wedge d\bar{z}$, on définit

$$F^*\eta := f(F(w), \overline{F(w)}) \cdot |F'(w)|^2 \cdot dw \wedge d\bar{w}$$

Proposition 3.18. F^* commute à $\partial, \bar{\partial}, d$.

Preuve. C'est une propriété locale qui se vérifie facilement pour des ouverts de $\mathbb{C}$. □

La proposition suivante est facile.

Proposition 3.19. F^* préserve l'holomorphicité, la méromorphie et le type.

Proposition 3.20. Si $F : X \rightarrow Y$ est un morphisme non constant entre surfaces de Riemann et ω est une 1-forme méromorphe sur Y , alors pour tout $x \in X$,

$$\text{ord}_x(F^*\omega) = (1 + \text{ord}_{f(x)}\omega) \cdot m_x(F) - 1.$$

Preuve. Question locale, on se ramène à $F(w) = w^m$. Alors

$$F^*(f(z)dz) = f(w^m) \cdot m w^{m-1} \cdot dw$$

ce qui implique la forme désirée. □

Définition 3.21. Soit $F : X \rightarrow Y$ un morphisme non constant entre surfaces de Riemann. On définit la ramification de F , notée R_F , par

$$R_F := \sum_{x \in X} (m_x(F) - 1) = \sum_{y \in Y} [d(F) - \#(F^{-1}(y))].$$

La ramification d'un morphisme est un nombre entier positif ou nul. On a le résultat suivant, qui constitue l'essence de la formule de Riemann-Hurwitz

Théorème 3.22. *Soit $F : X \rightarrow Y$ un morphisme non constant entre surfaces de Riemann compactes et ω une 1-forme méromorphe sur Y . Alors*

$$\deg(F^*\omega) = d(F) \cdot \deg(\omega) + R_F$$

Preuve. On a successivement

$$\begin{aligned} \deg(F^*\omega) &= \sum_{x \in X} [(1 + \text{ord}_{f(x)}(\omega)) \cdot m_x(F) - 1] \\ &= \sum_{y \in Y} \sum_{x \in F^{-1}(y)} [(1 + \text{ord}_{f(x)}(\omega)) \cdot m_x(F) - 1] \\ &= \sum_{y \in Y} [(1 + \text{ord}_y(\omega)) \cdot d_y(F) - \#(F^{-1}(y))] \\ &= \deg(\omega) \cdot d(F) + R_F \end{aligned}$$

étant donné que $d_y(F) = d(F)$ ne dépend pas de y . $\square$

On verra plus tard que toute surface de Riemann compacte X admet une forme méromorphe non-nulle, et donc le théorème ci-dessus, combiné avec la Proposition 3.15, peut se reformuler en termes intrinsèques à X (formule de Riemann-Hurwitz).

3.4 L'équation $\bar{\partial}$.

Le résultat suivant est fondamental :

Théorème 3.23 (Lemme de Dolbeault). *Soit Ω un domaine du plan complexe et soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Alors il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f.$$

Preuve. On commence par le cas où f est à support compact. On prolonge alors f par zéro en dehors de Ω . On définit

$$u(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(z+w)}{w} dw \wedge d\bar{w}.$$

L'intégrale est bien définie car $1/w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$. Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ vérifie

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|w| \geq \varepsilon} \frac{1}{w} \frac{\partial f(z+w)}{\partial \bar{z}} dw \wedge d\bar{w} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|w| \geq \varepsilon} d \left(\frac{f(z+w)}{w} dw \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\varepsilon} \frac{f(z+w)dw}{w} \\ &= f(z) \end{aligned}$$

cette dernière identité se voyant en écrivant $w = \varepsilon e^{i\theta}$ et en passant en coordonnées polaires.

Dans le cas général, on écrit $\Omega = \cup K_n$ où K_n est un compact de Ω tel que K_n est contenu dans l'intérieur de K_{n+1} et $\Omega \setminus K_n$ n'a pas de composante connexe bornée. Ainsi, le théorème de Runge implique que toute fonction holomorphe au voisinage de K_n est approchable uniformément sur K_n par des fonctions holomorphes définies sur Ω tout entier.

Par la partie précédente, on peut résoudre $\frac{\partial u_n}{\partial \bar{z}} = f$ sur un voisinage de K_n . En particulier, $u_{n+1} - u_n$ est holomorphe au voisinage de K_n et il existe $h_n \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)$ telle que $\sup_{K_n} |u_{n+1} - u_n - h_n| \leq 2^{-n}$. L'expression

$$u := u_n + \sum_{m \geq n} (u_{m+1} - u_m - h_m) - h_{n-1} - \dots - h_1$$

est en réalité indépendante de n . On peut voir que c'est une fonction lisse car sur K_n , la série de fonctions holomorphes $\sum_{m \geq n} (u_{m+1} - u_m - h_m)$ est uniformément convergente et définit donc une fonction holomorphe (en particulier, lisse). Ainsi, au voisinage de K_n , on a $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_n}{\partial \bar{z}} = f$. $\square$

Un corollaire important du lemme de Dolbeault est le théorème suivant

Théorème 3.24 (Théorème de Mittag-Leffler). *Soit $A \subset \mathbb{C}$ un ensemble discret, et soit, pour tout $a \in A$, $p_a(z)$ un polynôme en $\frac{1}{z-a}$. Alors il existe une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ telle que pour tout $a \in A$, $f - p_a$ a une singularité effaçable en a . En particulier, la partie principale de f en a est p_a .*

Preuve. Soit U_a un petit disque autour de a tel que $U_a \cap U_{a'} = \emptyset$ si $a \neq a'$. On peut définir une fonction χ_a telle que $\text{Supp}(\chi_a) \subset U_a$ qui vaille 1 au voisinage de a . On définit alors $p := \sum_{a \in A} \chi_a p_a$. Ceci définit bien une fonction lisse sur $\mathbb{C} \setminus A$. De plus, $\frac{\partial p}{\partial \bar{z}}$ est nul au voisinage de A , donc $\frac{\partial p}{\partial \bar{z}}$ s'étend en une fonction lisse sur $\mathbb{C}$. Par le lemme de Dolbeault, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial p}{\partial \bar{z}}$. Sur $\mathbb{C} \setminus A$, on a $\frac{\partial(u-p)}{\partial \bar{z}} = 0$ donc $f := u - p$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus A$. Par ailleurs, comme u est lisse sur $\mathbb{C}$, f est bien méromorphe sur $\mathbb{C}$ et satisfait aux conclusions du théorème. $\square$

Pour finir cette partie, donnons deux définitions de cohomologies.

Définition 3.25 (Cohomologie de de Rham). Soit X une surface de Riemann et $k \in \{0, 1, 2\}$. On définit le k -ième espace de cohomologie de de Rham comme le quotient des k -formes d -fermées par les k -formes d -exactes.

$$H_{\text{dR}}^k(X, \mathbb{C}) := \frac{\{\omega \in \Omega_{X, \mathbb{C}}^k(X); d\omega = 0\}}{\{df; f \in \Omega_{X, \mathbb{C}}^{k-1}(X)\}} = \frac{\text{Ker } d}{\text{Im } d}.$$

Les espaces $H_{\text{dR}}^k(X, \mathbb{C})$ sont des espaces vectoriels complexes. Clairement, $H_{\text{dR}}^0(X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$. Par ailleurs, on admettra les résultats importants suivants valables plus généralement pour des variétés réelles, cf [3, Chapitre 5].

Théorème 3.26. *Soit X une surface de Riemann.*

1. (Lemme de Poincaré) Si $U \subset X$ est homéomorphe à un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, $H_{\text{dR}}^k(U, \mathbb{C}) = 0$ pour $k = 1, 2$.
2. Si X est compacte, alors $H_{\text{dR}}^k(X, \mathbb{C})$ est de dimension finie pour tout k .
3. (dualité de Poincaré) Si X est compacte, alors l'intégration fournit un isomorphisme

$$H_{\text{dR}}^2(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}.$$

Ainsi, pour une surface de Riemann compacte X , le seul espace de cohomologie de de Rham comportant une information non-triviale est le H^1 . On peut montrer, comme conséquence du théorème de Misiurewicz, que $H_{\text{dR}}^1(X, \mathbb{C})$ est la complexification de l'abélianisé de $\pi_1(X)$. En pratique, toute surface de Riemann compacte est difféomorphe à un tore à g trous, et son H^1 est alors isomorphe à $\mathbb{C}^{2g}$ (cf section suivante).

Définition 3.27 (Cohomologie de Dolbeault). Soit X une surface de Riemann et soient $p, q \in \{0, 1\}$. On définit le (p, q) -ième espace de cohomologie de Dolbeault comme le quotient des (p, q) -formes $\bar{\partial}$ -fermées par les $(p, q - 1)$ -formes $\bar{\partial}$ -exactes.

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) := \frac{\{\omega \in \Omega_X^{p,q}(X); \bar{\partial}\omega = 0\}}{\{\bar{\partial}f; f \in \Omega_X^{p,q-1}(X)\}} = \frac{\text{Ker } \bar{\partial}}{\text{Im } \bar{\partial}}.$$

Ces espaces sont des espaces vectoriels complexes.

Proposition 3.28. *On a les résultats suivants*

1. $H_{\bar{\partial}}^{0,0}(X, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{O}_X(X)$. En particulier, si X est compacte, $H_{\bar{\partial}}^{0,0}(X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$.
2. $H_{\bar{\partial}}^{1,0}(X, \mathbb{C})$ est isomorphe à l'espace des $(1, 0)$ -formes holomorphes sur X .

Preuve. 1. Trivial.

2. C'est une conséquence de la Proposition 3.8.

□

4 Surface de Riemann associée à une fonction algébrique

On ne va traiter qu'un exemple simple, référant à [1, 5] pour le cas général. Considérons la "fonction"

$$y = \sqrt[3]{1 - x^3}$$

Par les théorèmes classiques d'analyse complexe, on peut définir de manière non-unique une telle fonction holomorphe $y = y(x)$ au voisinage de tout point $x_0 \notin \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{2i\pi/3}$. Cette fonction est uniquement déterminée par la valeur de y en x_0 – il y a alors trois choix possibles. De même, pour tout point $y_0 \notin \{1, j, j^2\}$, on peut définir au voisinage de y_0 une fonction $x = x(y)$ telle que $x = \sqrt[3]{1 - y^3}$.

On définit

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x^3 + y^3 = 1\}.$$

Cette espace peut être muni d'une structure de variété réelle de dimension 2, et l'on voudrait munir X d'une structure de surface de Riemann telle que les deux projections

canoniques $p_i : X \rightarrow \mathbb{C}$, $i \in \{1, 2\}$, soient holomorphes.

Pour ce faire, on a besoin de définir des coordonnées compatibles. En un point $(x_0, y_0) \in X$ tel que $y_0 \neq 0$, la remarque ci-dessus montre qu'il existe une fonction holomorphe $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un petit voisinage de V de x_0 telle que $\phi(x_0) = y_0$ et $\phi(x)^3 = 1 - x^3$. Ainsi, $p_1 : X \rightarrow \mathbb{C}$, $p_1(x, y) = x$ induit un homéomorphisme d'un petit voisinage de (x_0, y_0) vers son image et dont l'inverse est donné par $x \mapsto (x, \phi(x))$.

En un point $(x_0, y_0) \in X$ tel que $y_0 = 0$, alors $x_0 \neq 0$. On peut faire la même construction que précédemment et écrire localement $x = x(y)$ au voisinage de y_0 de sorte que p_2 fournit une carte locale.

Il reste à vérifier que les cartes locales ainsi définies sont bien compatibles. Les cartes définies à l'aide de p_1 sont automatiquement compatibles car les changements de cartes valent l'identité. Il reste à voir que p_1 est compatible avec p_2 , ce qui revient à dire que les fonctions $x = x(y)$ et $y = y(x)$ définies ci-dessus sont holomorphes, ce qui est bien sûr le cas. Les cartes étant par définitions holomorphes, la fonction $x = p_1$ est une application holomorphe sur X et la projection $y = p_2$ définit une fonction holomorphe sur X telle que $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

On peut étendre cette construction pour définir X au dessus de $\mathbb{P}^1$. En effet, définissons

$$X' = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2; x^3 + y^3 = z^3\}$$

muni de la projection $p : X' \rightarrow \mathbb{P}^1$, $p([x : y : z]) = [x : z]$. Alors X s'identifie à l'ouvert affine ($z \neq 0$) et via cette identification, p étend p_1 à X' . Ensemblistement, $X' = X \cup \{[-1 : 1 : 0], [-1 : j : 0], [-1 : j^2 : 0]\}$ et de la même manière que précédemment, on peut définir une structure de surface de Riemann sur X' étendant celle de X et pour laquelle $p : X' \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un morphisme. Alors, X' est un revêtement ramifié de degré 3 de la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$, qui ramifie seulement au dessus de 0, de préimage $[0 : 1 : 0]$ et de multiplicité 3.

Pour finir, mentionnons qu'on peut construire sur X une forme différentielle holomorphe. Pour ce faire, il faut la définir dans les coordonnées x et y et vérifier la condition de compatibilité. Au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in X$ avec $y_0 \neq 0$, on sait que $y = y(x)$ et on définit alors $\omega = \frac{dx}{y}$. Au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in X$ où $x_0 \neq 0$, on prend $\omega = -\frac{ydy}{x^2}$. Alors, la relation $x^2dx + y^2dy = 0$ implique que les deux expressions sont compatibles, ce qui définit une forme holomorphe ω sur X , que l'on peut légitimement considérer comme la forme

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$$

sur $\mathbb{C}$. La forme ω a alors 3 zéros d'ordre un sur X localisés sur $p_1^{-1}(0)$. Près des points à l'infini ($z = 0$), ie $X' \setminus X$, on a une coordonnée $v = z/x$ de sorte que $u = y/x$ est une fonction de v étant donné que $u^3 = v^3 - 1$. Alors on peut vérifier que la forme ω se transforme en $-\frac{dv}{uv}$. Ainsi ω s'étend en une forme méromorphe sur X' avec un pôle simple le long de ($v = 0$), ce qui correspond à un pôle simple en chacun des trois points à l'infini. On en déduit que

$$\deg(\omega) = 0$$

ce qui est cohérent avec le fait que X' est un tore, cf Exemples 3.17 et 5.4.

5 Quelques considérations topologiques

Un triangle dans X est l'image d'un triangle euclidien T par une application continue $\Phi : T \rightarrow X$ qui induit un homéomorphisme sur son image. Une triangulation de X est la donnée d'une collection de triangles qui recouvrent X et telle que l'intersection de deux triangles est soit vide, soit un sommet, soit une arête.

Étant donnée une triangulation, un raffinement est une triangulation obtenue en rajoutant des sommets (soit à l'intérieur d'un triangle, en obtenant alors trois nouvelles arêtes ; soit sur une arête, obtenant alors une nouvelle arête) de manière successive. Étant données deux triangulations, on peut toujours trouver un raffinement commun en concaténant tous les sommets et en rajoutant suffisamment de sommets et arêtes.

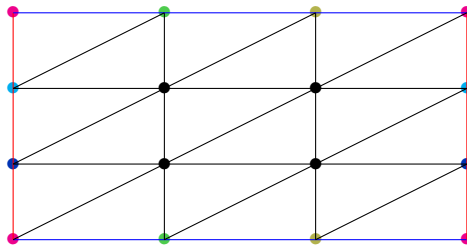
La caractéristique d'Euler d'une triangulation d'une surface compacte est définie par la formule

$$\# \text{Sommets} - \# \text{Arêtes} + \# \text{Triangles}$$

Les deux opérations élémentaires mentionnées ci-dessus préservent la caractéristique d'Euler d'une triangulation et donc sont les mêmes pour deux triangulations données. Par ailleurs, un théorème important établit que toute surface de Riemann X est triangulable. Ainsi, on peut définir la caractéristique d'Euler $\chi(X)$ d'une surface compacte X comme la caractéristique de n'importe quelle triangulation.

Exemple 5.1. On a $\chi(\mathbb{P}^1) = -2$. Ceci se voit en triangulant la sphère en huit "quarts de dôme" ; on a alors $\#S = 6$, $\#A = 12$, $\#T = 8$.

Exemple 5.2. On a $\chi(\mathbb{C}/\Lambda) = 0$. Ceci se voit en triangulant la sphère en huit "quarts de dôme" ; on a alors $\#S = 6$, $\#A = 12$, $\#T = 8$.



De manière plus générale, on peut considérer le tore à g trous Σ_g qui est défini comme la somme connexe de g tores. Si $g = 0$, on a $\Sigma_g := \mathbb{S}^2$. Lorsqu'on attache une anse à une surface, cela revient à enlever 2 petits disques (triangulés par deux triangles qui se recollent le long d'un côté, d'où $\chi(\text{disque}) = 1$) et à attacher un cylindre qui doit se recoller le long des deux paires de 4 arêtes. Une triangulation similaire à celle du tore montre que $\chi(\text{cylindre}) = 0$, et donc la caractéristique d'Euler baisse de 2 à chaque fois que l'on recolle une anse. Ainsi,

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g.$$

On peut montrer que toute surface orientée compacte est difféomorphe à une surface Σ_g pour un certain entier g . Ainsi, le "nombre de trous" détermine la structure différentiable

d'une surface compacte orientée. Enfin, en utilisant la suite exacte de Meyer-Vietoris, on peut voir également que

$$b_1(\Sigma_g) = 2g$$

ce qui peut se traduire, pour toute surface compacte orientée X en la relation

$$\chi(X) + b_1(X) = 2.$$

L'énoncé suivant est à rapprocher du Théorème 3.22.

Proposition 5.3. *Soit $F : X \rightarrow Y$ un morphisme non constant entre surfaces de Riemann compactes. Alors*

$$\chi(X) = d(F) \cdot \chi(Y) - R_F.$$

Preuve. On choisit une triangulation Δ_Y sur Y qu'on suppose contenir l'image des points de ramifications de F et telle que F induit un biholomorphisme en restriction à chaque composante connexe de l'image inverse de triangle ouvert de Δ_Y . On peut en déduire une triangulation $\Delta_X := F^* \Delta_Y$ en prenant les images inverse de tous les sommets. Alors $\#T_X = d(F) \cdot T_Y$, $\#A_X = d(F) \cdot \#A_Y$. Soit $B \subset Y$ l'ensemble des points de branchements de F . Tous les point de $Y \setminus B$ admet exactement $d(F)$ préimages. Par ailleurs, comme $\sum_{y \in B} \#F^{-1}(y) = d(F) \cdot \#B - R_F$, on a finalement que $\#S_X = d(F) \cdot \#S_Y - R_F$, d'où la formule. $\square$

Exemple 5.4. Dans l'exemple du Chapitre 4 de la surface de Riemann X' associée à la fonction $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$. Le revêtement $p : X' \rightarrow \mathbb{P}^1$ est de degré trois et ramifie exactement au dessus des trois points $1, j, j^2 \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ où chaque fibre est de cardinal un. Alors la formule de la Proposition 11.2 ci-dessus montre que $\chi(X') = 3\chi(\mathbb{P}^1) - 3 \cdot 2 = 0$, donc X' est un tore complexe.

On en déduit de la Proposition 11.2 le résultat suivant.

Théorème 5.5. *Soit X, Y des surfaces de Riemann compactes de genre respectif g et g' , et soit $F : X \rightarrow Y$ un morphisme non constant. Alors $g \geq g'$. Si $g = g' \geq 1$, alors F est non-ramifié, et de plus, c'est nécessairement un isomorphisme si $g = g' \geq 2$.*

Preuve. Soit $d := d(F) \geq 1$. Par la Proposition 11.2, on a $2 - 2g = d \cdot (2 - 2g') - R_F$ ou encore $g = d(g' - 1) + R_F + 1$. L'inégalité $g \geq g'$ est claire si $g' = 0$. Puis, si $g' \geq 1$, comme $d \geq 1$ et $R_F \geq 0$, on a $g \geq 1 \cdot (g' - 1) + 0 + 1 = g'$. Le cas d'égalité implique $R_F = 0$. En genre au moins deux, on a alors $g - 1 = d(g' - 1)$ d'où $d = 1$. $\square$

6 Faisceaux

6.1 Définitions et exemples

Définition 6.1. Soit X une surface de Riemann. Un préfaisceau $\mathcal{F}$ en groupes abéliens (ou espaces vectoriels, anneaux, etc.) sur X consiste en la donnée pour tout ouvert $U \subset X$ d'un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ ainsi que, pour tout couple d'ouverts $U \subset V$, d'un homomorphisme de groupes (ou une application linéaire, etc.) $r_{U,V} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. $r_{U,U} = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$.
2. Si $U \subset V \subset W$, alors $r_{U,W} = r_{U,V} \circ r_{V,W}$.

Pour alléger les notations, si $s \in \mathcal{F}(V)$ et $U \subset V$, on notera $s|_U := r_{U,V}(s)$. Si l'on pense au préfaisceau des fonctions continues sur X , $\mathcal{C}_X^0(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \text{ continue}\}$ alors celui-ci vérifie les propriétés local-global suivantes.

Définition 6.2. On dit qu'un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur une surface de Riemann est un faisceau si pour toute réunion d'ouverts $U = \cup_{i \in I} U_i$ de X , on a :

1. Si $f, g \in \mathcal{F}(U)$ vérifient $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ pour tout $i \in I$, alors $f = g$.
2. Etant donnés $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ pour tout $i \in I$, il existe un (unique) élément $f \in \mathcal{F}(U)$ tel que $f|_{U_i} = f_i$.

L'unicité de 2. est garantie par 1.

Exemple 6.3. L'exemple le plus classique de préfaisceau qui n'est pas un faisceau est celui du préfaisceau constant $\mathbb{C}$ défini par $\mathbb{C}(U) = \mathbb{C}$. Clairement, si $U = U_1 \sqcup U_2$ est un ouvert avec deux composantes connexes, alors $f_1 := 1 \in \mathbb{C}(U_1)$ et $f_2 := 0 \in \mathbb{C}(U_2)$ ne proviennent pas de la restriction d'un même élément $f \in \mathbb{C}(U)$. Pour pallier ce problème, on introduit le *faisceau localement constant* $\underline{\mathbb{C}}$ défini pour tout ouvert $U = \sqcup_{i \in I} U_i$ par $\underline{\mathbb{C}}(U) = \sqcup_{i \in I} \mathbb{C}$.

Exemple 6.4. Les exemples de faisceaux les plus importants sur une surface de Riemann X donnée sont les suivants :

1. Le faisceau $\mathcal{C}_X^\infty$ des fonctions lisses.
2. Le faisceau $\mathcal{E}_X^k$ (resp. $\mathcal{E}_X^{p,q}$) des k -formes lisses (resp. des (p, q) -formes lisses).
3. Le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes.
4. Le faisceau $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes s'annulant en un point $x \in X$.
5. Le faisceau Ω_X^1 (parfois noté K_X) des 1-formes holomorphes.

Remarque 6.5. Les faisceaux $\mathcal{F} = \mathcal{C}_X^\infty, \mathcal{E}_X^k, \mathcal{E}_X^{p,q}$ se comportent très différemment des faisceaux $\mathcal{O}_X$ ou Ω_X^1 au sens si K est un compact de X , alors l'homomorphisme induit par les restrictions

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{F}(U)$$

est surjectif, étant donnée l'existence de fonctions cut-off. Un faisceau satisfaisant une telle condition est appelé mou. A l'inverse, pour construire des objets holomorphes globaux, il ne suffit pas de le faire sur un petit ouvert donné.

Définition 6.6. La *tige* d'un préfaisceau $\mathcal{F}$ en un point $x \in X$ est définie par

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U).$$

De manière équivalente, $\mathcal{F}_x = \{(U, s), U \text{ voisinage ouvert de } x, s \in \mathcal{F}(U)\} / \sim$ où $(U, s) \sim (V, t)$ si et seulement s'il existe $W \subset U \cap V$ voisinage ouvert de x tel que $s|_W = t|_W$.

Définition 6.7. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux faisceaux sur une surface de Riemann X . Un morphisme de faisceau $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est la donnée, pour tout ouvert $U \subset X$, d'un homomorphisme de groupes (ou application linéaire, etc.) $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ tel que $r_{U,V}^{\mathcal{G}} \circ \varphi_U = \varphi_V \circ r_{U,V}^{\mathcal{F}}$ pour tous $U \subset V$.

Étant donné un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, on peut définir les préfaisceaux $\text{Ker}(\varphi), \text{Im}(\varphi), \text{Coker}(\varphi)$ définis de la manière évidente, ie par exemple $\text{Ker}(\varphi)(U) := \text{Ker}(\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U))$. Il est facile de voir que le préfaisceau $\text{Ker}(\varphi)$ est en fait automatiquement un faisceau, mais ce n'est pas forcément le cas des deux autres comme le prouve l'exemple standard suivant.

Exemple 6.8. Soit $\mathcal{O}_X^*$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X qui ne s'annulent pas, qu'on muni d'une structure de faisceaux en groupes via le produit de fonctions. On pose $X = \mathbb{C}^*$, et on définit le morphisme de faisceaux $\exp : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$ défini par $\exp(f) = e^f$, le préfaisceau $\text{Im}(\exp)$ n'est pas un faisceau. En effet, la fonction $z \in \mathcal{O}_X^*$ est l'image locale par $\exp$ de fonctions f_i définies sur des ouverts U_i recouvrant X , mais il n'existe pas $f \in \mathcal{O}_X(X)$ telle que $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in X$.

Pour remédier à ce genre de problème, on introduit pour tout préfaisceau une construction (le faisceautisé) produisant un faisceau qui lui soit canoniquement associé avec les mêmes tiges.

Définition 6.9. Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur X . On définit le faisceautisé $\mathcal{F}^+$ de $\mathcal{F}$ en prenant pour $\mathcal{F}^+(U)$ l'ensemble des applications $s : U \rightarrow \cup_{x \in U} \mathcal{F}_x$ telles que $s(x) \in \mathcal{F}_x$ et pour tout $x \in U$, il existe $V \subset U$ voisinage de x et une section $t \in \mathcal{F}(V)$ telle que $s(y) = t(y)$ pour tout $y \in V$.

Autrement dit, on force les sections locales de $\mathcal{F}$ à se recoller en sections de $\mathcal{F}^+$. Clairement, $\mathcal{F}^+$ est un faisceau qui est de plus muni d'une inclusion de préfaisceaux $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^+$.

Définition 6.10. Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux. On définit le faisceau image (resp. conoyau) comme le faisceautisé du préfaisceau $U \mapsto \text{Im}(\varphi_U)$ (resp. $U \mapsto \text{Coker}(\varphi_U)$).

Définition 6.11. Soit $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur X ; on dit que φ est injective (resp. surjective) si $\text{Ker}(\varphi)$ est le faisceau nul $\{0\} \subset \mathcal{F}$ (resp. $\text{Im}(\varphi) = \mathcal{G}$).

Remarque 6.12. Être injectif (resp. surjectif) est donc bien une propriété locale. Ainsi, l'Exemple 6.8 montre que $\exp$ est surjectif. On peut vérifier que φ est injectif (resp. surjectif) si et seulement si le morphisme $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ induit sur les tiges est injectif (resp. surjectif).

Définition 6.13. Une suite $\mathcal{F}^\bullet$ de morphismes de faisceaux

$$\dots \longrightarrow \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi^i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \mathcal{F}^{i+2} \xrightarrow{\varphi^{i+2}} \dots$$

est appelée un complexe de faisceaux si pour tout i , $\varphi^{i+1} \circ \varphi^i = 0$. C'est un complexe *exact* si pour tout i , $\text{Im}(\varphi^i) = \text{Ker}(\varphi^{i+1})$. Un complexe exact de la forme $0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow 0$ est appelé une suite exacte courte de faisceaux.

Il découle de la Remarque 6.12 qu'on a le résultat suivant :

Proposition 6.14. *Un complexe de la forme*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow 0$$

est exact si et seulement si le complexe de tiges associé

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x^0 \longrightarrow \mathcal{F}_x^1 \longrightarrow \mathcal{F}_x^2 \longrightarrow 0$$

est exact pour tout $x \in X$.

Si $\varphi : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$ est une injection de faisceaux, alors on a par définition une injection $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \hookrightarrow \mathcal{G}(U)$ pour tout ouvert $U \subset X$, et donc en particulier pour X . En revanche, on a vu qu'il existe des morphismes de faisceaux surjectifs $\varphi : \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ tels que les morphismes de groupes associés $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ ne soient pas nécessairement surjectifs pour certains ouverts U . En particulier, φ n'induit pas nécessairement une surjection $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$. Les outils cohomologiques sont développés précisément pour comprendre ce défaut de surjectivité.

Exemple 6.15. Afin de relier les cohomologies de de Rham et Dolbeault à celle de Čech, on se servira par la suite de différents complexes exacts qui sont des "résolutions" des faisceaux respectif $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}_X$, Ω_X^1 . La première est une résolution du faisceau constant

$$(6.1) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{d} \mathcal{C}_X^1 \xrightarrow{d} \mathcal{C}_X^2 \longrightarrow 0$$

la deuxième est une résolution du faisceau structural

$$(6.2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}_X^{0,1} \longrightarrow 0$$

et la dernière est une résolution du faisceau des différentielles holomorphes

$$(6.3) \quad 0 \longrightarrow \Omega_X^1 \hookrightarrow \mathcal{C}_X^{1,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}_X^{1,1} \longrightarrow 0$$

Exemple 6.16. Un exemple utile de suite exacte courte est celle associée à un point $x \in X$. On a alors

$$(6.4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{I}_x \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_x \longrightarrow 0$$

où le faisceau $\mathcal{O}_x$ est le faisceau dit gratte-ciel, défini par

$$\mathcal{O}_x(U) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exemple 6.17 (Suite exacte exponentielle). Soit X une surface de Riemann, on a une suite exacte courte

$$(6.5) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2i\pi} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

6.2 Cohomologie de Čech

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur une surface de Riemann X , et soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts $U_i \subset X$. Si $\{i_0, \dots, i_q\} \subset I$, on définit $U_{i_0 \dots i_q} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}$. Enfin, si $q \geq 0$, on définit le groupe des q -cochaînes de $\mathcal{F}$ relativement à $\mathcal{U}$ par

$$C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0 \dots i_q}).$$

On définit une application de cobord $\delta : C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ par $\delta((f_i)_{i \in I}) = (c_{ij})_{i,j \in I}$ où $c_{ij} := f_i|_{U_{ij}} - f_j|_{U_{ij}}$. On définit aussi

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \{(c_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid c_{ij} + c_{jk} = c_{ik} \text{ sur } U_{ijk}, \forall i, j, k \in I\}.$$

En particulier un cocycle $(f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ vérifie $f_{ii} = 0$ pour tout $i \in I$, et donc également $f_{ij} = -f_{ji}$ pour tous $i, j \in I$. Enfin, on note $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \text{Im}(\delta)$. Il est clair que $B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, de sorte que la définition suivante est légitime

Définition 6.18. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur une surface de Riemann X . On définit le premier groupe de cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$ relativement au recouvrement $\mathcal{U}$ par

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

On notera aussi $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \{(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) ; \delta((f_i)_{i \in I}) = 0\}$. Par les axiomes définissant un faisceau, on a que l'application $\mathcal{F}(X) \rightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ induite par la restriction aux U_i induit un isomorphisme $\mathcal{F}(X) \simeq \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Exemple 6.19. On écrit $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$ ce qui définit un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ tel que $U_{12} \simeq \mathbb{C}^*$. Si $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{C}^*)$, alors on peut écrire $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ où cette série est normalement convergente sur chaque compact de $\mathbb{C}^*$. En particulier, $f_+ := \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est normalement convergente sur chaque compact de $\mathbb{C}$ et $f_- := -\sum_{n \leq -1} a_n z^n$ est normalement convergente sur chaque compact de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$. Alors, la décomposition $f = f_+ - f_-$ montre que $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$.

Soit $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un raffinement de $\mathcal{U}$, ie il existe une application de raffinement $\tau : A \rightarrow I$ telle que $V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in A$. Alors τ induit une application

$$\tau^* : \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

comme suit. Si $\xi = (c_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, on définit $\tau^*(\xi) = (\gamma_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in A}$ par $\gamma_{\alpha\beta} := c_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}|_{V_{\alpha\beta}}$. Il est alors clair que $\tau^*(B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \subset B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ et donc τ^* est bien définie sur la cohomologie.

Il est important de vérifier dans quelle mesure les objets ainsi construits dépendent des choix faits et non seulement de X et $\mathcal{F}$. Le premier résultat dans ce sens est le suivant

Proposition 6.20. Si $\sigma, \tau : A \rightarrow I$ sont deux applications de raffinement de $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, alors les applications induites en cohomologie σ^* et τ^* coïncident.

Preuve. Soit $(f_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Comme $V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)} \cap U_{\sigma(\alpha)}$, on a un cocycle $g_\alpha := f_{\tau(\alpha), \sigma(\alpha)}|_{V_\alpha} \in \mathcal{F}(V_\alpha)$. Sur $V_{\alpha\beta}$, on a

$$\begin{aligned} f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} - f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} &= (f_{\tau(\alpha)\sigma(\alpha)} + f_{\sigma(\alpha)\tau(\beta)}) - (f_{\sigma(\alpha)\tau(\beta)} + f_{\tau(\beta)\sigma(\beta)}) \\ &= g_\alpha - g_\beta \end{aligned}$$

d'où $f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} - f_{\sigma(\alpha)\sigma(\beta)} \in B^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, ce qui prouve le résultat. $\square$

Proposition 6.21. *Si $\mathcal{V}$ est un raffinement de $\mathcal{U}$, alors l'application induite*

$$\tau^* : \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

est injective.

Preuve. Soit $\tau : A \rightarrow I$ un raffinement et soit $\xi = (f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tel que $\tau^*(\xi) = 0$. Alors il existe $g_\alpha \in \mathcal{F}(V_\alpha)$ tels que $f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} = g_\alpha - g_\beta$ sur $V_{\alpha\beta}$. Soit $i \in I$ et $x \in U_i$. On choisit $\alpha \in A$ de sorte que $x \in V_\alpha$ et on définit $h_i(x) = g_\alpha(x) + f_{i\tau(\alpha)}(x)$. Si $\beta \in A$ est tel que $x \in V_\beta$, alors

$$g_\alpha(x) + f_{i\tau(\alpha)}(x) - (g_\beta(x) + f_{i\tau(\beta)}(x)) = g_\alpha(x) - g_\beta(x) - f_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}(x) = 0.$$

Ainsi h_i définit bien un élément de $\mathcal{F}(U_i)$. De plus, on a, si $x \in U_{ij}$:

$$\begin{aligned} h_i(x) - h_j(x) &= g_\alpha(x) + f_{i\tau(\alpha)}(x) - g_\alpha(x) - f_{j\tau(\alpha)}(x) \\ &= f_{ij}(x) \end{aligned}$$

et donc $\xi = (f_{ij})_{i,j \in I} = \delta((h_i)_{i \in I}) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. $\square$

On pose la définition suivante :

Définition 6.22. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur une surface de Riemann X . On définit le premier groupe de cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$ par

$$\check{H}^1(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Plus précisément, $\check{H}^1(X, \mathcal{F}) = \bigsqcup_{\mathcal{U}} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / \sim$ où deux éléments $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \ni f \sim f' \in \check{H}^1(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ si et seulement s'il existe un raffinement $\mathcal{V}$ commun à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ tel que $\tau^*(f) = \tau'^*(f')$ où $\tau^* : \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ et $\tau'^* : \check{H}^1(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ sont les morphismes de raffinement induits sur la cohomologie.

Par la Proposition 6.21, on a pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de X une application injective $\tau^* : \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F})$. L'espace $\check{H}^1(X, \mathcal{F})$ est naturellement muni d'une structure de groupe abélien.

Théorème 6.23. (*Théorème de Leray*) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau en groupes abéliens sur une surface de Riemann X et soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . On suppose que pour tout $i \in I$, on a $\check{H}^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$. Alors l'application naturelle

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Preuve. Il suffit de prouver qu'il existe un raffinement $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tel que l'application induite $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ est surjective. On fixe une application de raffinement $\tau : A \rightarrow I$ telle que $V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$.

Soit donc $(c_{\alpha\beta})_{\alpha\beta \in A} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Etant donné un indice $i \in I$, on a un recouvrement de $(U_i \cap V_\alpha)_{\alpha \in A}$ de U_i . Comme $\check{H}^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$, les cocycles $c_{\alpha\beta}|_{U_i}$ sont des cobords, et ainsi il existe $g_{i\alpha} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_\alpha)$ tels que

$$c_{\alpha\beta}|_{U_i} = g_{i\alpha} - g_{i\beta} \quad \text{sur} \quad U_i \cap V_{\alpha\beta}.$$

Sur $U_{ij} \cap V_{\alpha\beta}$, on a $g_{i\alpha} - g_{i\beta} = c_{\alpha\beta} = g_{j\alpha} - g_{j\beta}$ ou encore $g_{i\alpha} - g_{j\alpha} = g_{i\beta} - g_{j\beta}$ donc il existe des éléments $\gamma_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ tels que $\gamma_{ij} = g_{i\alpha} - g_{j\alpha}$ sur $U_{ij} \cap V_\alpha$. Il est clair que les γ_{ij} définissent un cocycle de $\mathcal{F}$ relatif à $\mathcal{U}$. Enfin, sur $V_{\alpha\beta} \subset U_{\tau(\beta)}$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau(\alpha)\tau(\beta)} + c_{\alpha\beta} &= g_{\tau(\alpha)\alpha} - g_{\tau(\beta)\alpha} + g_{\tau(\beta)\alpha} - g_{\tau(\beta)\beta} \\ &= g_{\tau(\alpha)\alpha} - g_{\tau(\beta)\beta} \end{aligned}$$

et comme $g_{\tau(\beta)\beta} \in \mathcal{F}(U_{\tau(\beta)} \cap V_\beta) = \mathcal{F}(V_\beta)$, ceci montre que $(c_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in A} = \tau^*((-\gamma_{ij})_{i, j \in I})$ dans $\check{H}^1(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. $\square$

L'utilité du théorème de Leray repose sur la possibilité de trouver une classe d'ouverts sans cohomologie. Ceci est fourni, pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ par la conséquence suivante du Lemme de Dolbeault, cf Théorème 3.23.

Théorème 6.24. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors $\check{H}^1(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$.*

Preuve. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de Ω . On sait qu'il existe des partitions de l'unité subordonnées à $\mathcal{U}$, ie il existe des fonctions $\chi_i \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support dans U_i telles que $\{\text{Supp}(\chi_i); i \in I\}$ est localement fini et $\sum_{i \in I} \chi_i = 1$.

Soit $(c_{ij})_{i, j \in I}$ un cocycle de $\mathcal{O}_\Omega$ relativement à $\mathcal{U}$. On définit $\varphi_i := \sum_{j \in I} \chi_j c_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$. Alors on a sur $U_{k\ell}$

$$\varphi_k - \varphi_\ell = \sum_{j \in I} \chi_j c_{kj} - \sum_{j \in I} \chi_j c_{\ell j} = c_{k\ell}.$$

d'où $\bar{\partial}\varphi_k = \bar{\partial}\varphi_\ell$ sur $U_{k\ell}$. Il existe donc une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que pour tout $i \in I$, on ait $\bar{\partial}\varphi_i = \psi d\bar{z}$ sur U_i . Par le Théorème 3.23, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\bar{\partial}u = \psi d\bar{z}$ sur Ω . Alors, l'égalité suivante, valide sur $U_{k\ell}$

$$c_{k\ell} = \varphi_k - \varphi_\ell = (\varphi_k - \psi) - (\varphi_\ell - \psi)$$

montre que $(c_{k\ell})_{k\ell}$ est un cobord; en effet, on a $\bar{\partial}(\varphi_k - \psi) = 0$ sur U_k . $\square$

Exemple 6.25. En utilisant le résultat de l'Exemple 6.19 et les Théorèmes 6.23-6.24, on obtient que $\check{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$.

Exemple 6.26. Soit $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$, $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ et $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ la projection canonique. On recouvre X par $\mathcal{U} = \{U_i, 1 \leq i \leq 4\}$ avec $U_i = \pi(V_i)$ où V_i est l'intérieur d'un carré de $\mathbb{C}$ dont le sommets en bas à gauche sont donnés par les point d'affixe $0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}$. On a bien

$\check{H}^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ par le Théorème 6.24. On se donne un cocycle $(f_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$. Le cocycle est déterminé par les données de f_{12}, f_{13}, f_{14} . Il n'y a qu'une intersection triple, qui coïncide avec U_{14} ; on représente cet ouvert comme la carré ouvert privé de la "croix centrale" donnant ainsi quatre composantes connexes. On note $f_{ij}^{(k)}$, $k \in \{1, \dots, 4\}$ la valeur de f_{ij} sur chacune de ses composantes. Cela donne lieu à douze paramètres. Il faut maintenant déterminer les relations. Comme U_{12} a seulement deux composantes connexes, on a

$$f_{12}^{(1)} = f_{12}^{(3)}, \quad f_{12}^{(2)} = f_{12}^{(4)}$$

et de même avec U_{13} :

$$f_{13}^{(1)} = f_{13}^{(2)}, \quad f_{13}^{(3)} = f_{13}^{(4)}$$

Il ne reste donc que huit paramètres $f_{12}^{(1)}, f_{12}^{(2)}, f_{13}^{(1)}, f_{13}^{(3)}$ et les $f_{14}^{(k)}$, $k \in \{1, \dots, 4\}$. Mais il y a en fait des relations supplémentaires. En effet, U_{24} a deux composantes connexes, d'où

$$f_{24}^{(1)} = f_{24}^{(2)}, \quad f_{24}^{(3)} = f_{24}^{(4)}$$

et on a sur l'intersection triple la relation $f_{24} = f_{14} - f_{12}$, qui donne alors

$$f_{14}^{(1)} - f_{12}^{(1)} = f_{14}^{(2)} - f_{12}^{(2)}, \quad f_{14}^{(3)} - f_{12}^{(3)} = f_{14}^{(4)} - f_{12}^{(4)}.$$

Ainsi, parmi les $f_{14}^{(k)}$, $k \in \{1, \dots, 4\}$, on peut ne garder que $f_{14}^{(1)}$ et $f_{14}^{(3)}$. On répète l'opération avec l'intersection U_{34} qui n'a que deux composantes connexes, ce qui donne

$$f_{34}^{(1)} = f_{34}^{(3)}, \quad f_{34}^{(2)} = f_{34}^{(4)}$$

et donc, étant donné que $f_{34} = f_{14} - f_{13}$ sur l'intersection triple, on obtient

$$f_{14}^{(1)} - f_{13}^{(1)} = f_{14}^{(3)} - f_{13}^{(3)}, \quad f_{14}^{(2)} - f_{13}^{(2)} = f_{14}^{(4)} - f_{13}^{(4)}.$$

et par la première ligne, on déduit que $f_{14}^{(1)}$ détermine tous les $f_{14}^{(k)}$. Ainsi, il ne reste plus que cinq paramètres indépendants $f_{12}^{(1)}, f_{12}^{(2)}, f_{13}^{(1)}, f_{13}^{(3)}, f_{14}^{(1)}$ pour les cocycles. En ce qui concerne les cobords, ils sont déterminés par trois paramètres étant donné que les ouverts U_i sont connexes. En conclusion, $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^2$. Par ailleurs, on peut prouver que $\check{H}^1(U_i, \mathbb{C})$ pour chaque ouvert U_i de sorte que le Théorème de Leray montre finalement

$$\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^2.$$

6.3 Suite exacte longue en cohomologie

Soit X une surface de Riemann et soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}^2 \longrightarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux sur X . On a vu que $\mathcal{F}^1(X) \rightarrow \mathcal{F}^2(X)$ n'est pas nécessairement surjectif. On définit un morphisme connecteur $\delta : \mathcal{F}^2(X) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}^0)$ de la manière suivante.

Soit $g \in \mathcal{F}^2(X)$. Comme β est surjective, il existe un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X et des éléments $f_i \in \mathcal{F}^1(U_i)$ tels que $\psi_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$. Ainsi, $(f_i - f_j)|_{U_{ij}} \in \text{Ker}(\psi|_{U_{ij}}) =$

$\text{Im}(\varphi|_{U_{ij}})$ et donc il existe $h_{ij} \in \mathcal{F}^0(U_{ij})$ tels que $(f_i - f_j)|_{U_{ij}} = \varphi|_{U_{ij}}(h_{ij})$. Sur U_{ijk} , l'image de $h_{ij} + h_{jk} - h_{ik}$ par $\varphi|_{U_{ijk}}$ est nulle et par injectivité de φ , on déduit que $(h_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}^0)$. On veut voir que l'élément de $\check{H}^1(X, \mathcal{F}^0)$ induit est bien défini et donc indépendant des choix de $\mathcal{U}$ et $(f_i)_{i \in I}$. Si on prend un raffinement $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ et des éléments $f'_\alpha := f_{\tau(\alpha)}|_{V_\alpha}$ (pour une application de raffinement $\tau : A \rightarrow I$), on obtient clairement le même élément. Donc on peut supposer par la suite que l'on choisit le même recouvrement $\mathcal{U}$ mais différents relevés $f'_i \in \mathcal{F}^1(U_i)$ tel que $\psi|_{U_i}(f'_i) = g|_{U_i}$. Alors $f_i - f'_i$ est dans le noyau de $\psi|_{U_i}$, donc il existe $h_i \in \mathcal{F}^0(U_i)$ tel que $\varphi|_{U_i}(h_i) = f_i - f'_i$. Alors si h'_{ij} est un élément tel que $(f'_i - f'_j)|_{U_{ij}} = \varphi|_{U_{ij}}(h'_{ij})$, alors on a sur U_{ij} la relation $\varphi|_{U_{ij}}(h_{ij} - h'_{ij}) = \varphi|_{U_{ij}}(h_i - h_j)$ d'où $[h_{ij}] = [h'_{ij}]$ dans $\check{H}^1(X, \mathcal{F}^0)$.

Enfin, on définit les morphismes de groupes $\varphi^1 : \check{H}^1(X, \mathcal{F}^0) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}^1)$ et $\psi^1 : \check{H}^1(X, \mathcal{F}^1) \rightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{F}^2)$ en prenant les morphismes induits par φ, ψ sur les cochaînes, et en observant qu'ils sont compatibles avec l'application de bord. En résumé, on a le résultat suivant

Théorème 6.27. *Soit $0 \rightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}^2 \rightarrow 0$ une suite exacte courte de faisceaux sur une surface de Riemann X . Alors, la suite*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(X, \mathcal{F}^0) \xrightarrow{\varphi^1} \check{H}^1(X, \mathcal{F}^1) \xrightarrow{\psi^1} \check{H}^1(X, \mathcal{F}^2)$$

est exacte.

Preuve. On montre l'exactitude en trois étapes.

1. En $\mathcal{F}^2$. Si $g \in \mathcal{F}^2(X)$ est dans le noyau de δ , alors avec les notations précédentes, on a avec les notations précédentes que $h_{ij} = (h_i - h_j)|_{U_{ij}}$ pour $h_i \in \mathcal{F}^0(U_i)$. Alors $f_i + \varphi|_{U_i}(h_i)$ coïncide avec $f_j + \varphi|_{U_j}(h_j)$ sur U_{ij} d'où un élément $f' \in \mathcal{F}^1(X)$ tel que $\psi(f')|_{U_i} = g|_{U_i} + (\psi|_{U_i} \circ \varphi|_{U_i})(h_i) = g|_{U_i}$ et donc $\psi(f') = g$.
2. En $\check{H}^1(X, \mathcal{F}^0)$. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement suffisamment fin, et soit $(h_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}^0)$ tel que $\varphi^1((h_{ij})) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}^1)$. Il existe alors $c_i \in \mathcal{F}^1(U_i)$ tel que $\varphi|_{U_{ij}}(h_{ij}) = (c_i - c_j)|_{U_{ij}}$. On peut alors vérifier que $(h_{ij}) = \delta(\psi((c_i)))$. En effet, comme $\psi \circ \varphi = 0$, les sections locales $\psi|_{U_i}(c_i)$ se recollent en un élément de $\mathcal{F}^2(X)$ dont l'image par δ est par définition (h_{ij}) .
3. En $\check{H}^1(X, \mathcal{F}^1)$. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement suffisamment fin, et soit $(c_{ij})_{i,j \in I} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}^1)$ tel que $\psi^1((c_{ij})) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}^2)$. Il existe alors $\gamma_i \in \mathcal{F}^2(U_i)$ tel que $\psi|_{U_{ij}}(c_{ij}) = (\gamma_i - \gamma_j)|_{U_{ij}}$. Comme $\psi|_{U_i}$ est surjectif, il existe $a_i \in \mathcal{F}^1(U_i)$ tel que $\psi|_{U_i}(a_i) = \gamma_i$. Alors, le cocycle $(c_{ij} - (a_i - a_j)|_{U_{ij}})$ est cohomologue à (c_{ij}) et est dans le noyau de $\psi|_{U_{ij}}$, et donc dans l'image de $\varphi|_{U_{ij}}$. $\square$

6.4 Comparaison des cohomologies

Il y a plusieurs manières de définir la cohomologie d'un faisceau. Nous avons vu la cohomologie de Čech, très concrète mais peu illuminante. Il est plus fréquent de commencer par définir la cohomologie en utilisant des résolutions injectives, cf [2, §III.1]. Autrement dit, étant donné un faisceau $\mathcal{F}$, on l'injecte dans un faisceau $\mathcal{F}^0$ qui est le premier terme d'un complexe exact

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\varphi^2} \dots$$

où les faisceaux $\mathcal{F}_i$ sont injectifs. On définit alors

$$H^i(X, \mathcal{F}) := \frac{\text{Ker}(\varphi_X^i : \mathcal{F}^i(X) \rightarrow \mathcal{F}^{i+1}(X))}{\text{Im}(\varphi_X^{i-1} : \mathcal{F}^{i-1}(X) \rightarrow \mathcal{F}^i(X))}$$

On montre qu'il existe toujours des résolutions injectives, et que l'espace défini ainsi est indépendant de la résolution. Cependant, trouver en pratique des résolutions injectives n'est pas facile. Il est plus facile de trouver des résolutions acycliques, c'est à dire des résolutions par des faisceaux $\mathcal{F}^i$ qui n'ont pas de cohomologie en degré $q > 0$. Le théorème de de Rham-Weil montre qu'on peut utiliser des résolutions acycliques pour calculer la cohomologie, ie en utilisant la même formule que ci-dessus. Enfin, on peut montrer que les faisceaux mous (cf Remarque 6.5) sont acycliques. En combinant ceci aux résolutions fournies par l'Exemple 6.15, on obtient alors :

Théorème 6.28. *Soit X une surface de Riemann. On a alors les isomorphismes suivants :*

1. $\check{H}^1(X, \mathbb{C}) \simeq H_{\text{dR}}^1(X, \mathbb{C})$.
2. $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X, \mathbb{C})$.
3. $\check{H}^1(X, \Omega_X^1) \simeq H_{\bar{\partial}}^{1,1}(X, \mathbb{C})$.

7 Fibrés vectoriels

7.1 Définition

Soit X une variété différentiable. Un fibré vectoriel complexe de rang n sur X est la donnée d'une variété différentiable E et d'une application lisse $\pi : E \rightarrow X$ telle que chaque fibre $E_x := \pi^{-1}(x)$ est munie d'une structure de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension r vérifiant la condition de trivialité locale suivante. Pour tout $x \in X$, il existe $U \ni x$ un ouvert et un difféomorphisme $h_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{h_U} & U \times \mathbb{C}^n \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \text{pr}_U & \\ & U & \end{array}$$

soit commutatif et tel que pour tout $x \in U$, l'application $\varphi_x : E_x \rightarrow \mathbb{C}^n$ définie par $h_U(y) = (x, \varphi_x(y))$, $y \in E_x$, est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels.

Si X, E sont des variétés complexes, si π est holomorphe et h_U biholomorphe, alors on dit que E est un fibré vectoriel holomorphe. Si $n = 1$, on dit que E est un fibré en droites.

Définition 7.1. Soient $\pi : E \rightarrow X$ et $\pi' : E' \rightarrow X$ deux fibrés vectoriels holomorphes sur une variété complexe X . Une morphisme de rang r entre E et E' est la donnée d'une application holomorphe $u : E \rightarrow E'$ telle que

1. $\pi' \circ u = \pi$.
2. Pour tout $x \in E$, l'application induite $u_x : E_x \rightarrow E'_x$ est $\mathbb{C}$ -linéaire de rang r .

On dit que u est un isomorphisme de fibrés vectoriels si $\text{rk}(E) = \text{rk}(E') = r$. On dit qu'un fibré E de rang n est trivial s'il existe un isomorphisme $E \simeq X \times \mathbb{C}^n$.

7.2 Fonctions de transition

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de X muni de trivialisations $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$. On a un morphisme

$$\begin{aligned} h_i \circ h_j^{-1} : U_{ij} \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^n \\ (x, v) &\longmapsto (x, g_{ij}(x) \cdot v) \end{aligned}$$

où l'application $U_{ij} \ni x \mapsto g_{ij}(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est holomorphe. Les fonctions $(g_{ij})_{i,j \in I}$, appelées fonctions de transition, satisfont la relation de cocycle sur U_{ijk} :

$$(7.6) \quad g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}.$$

Si l'on remplace (h_i) par une autre famille de trivialisations (h'_i) , alors $h'_i \circ h_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ est de la forme $(x, v) \mapsto (x, \varphi_i(x) \cdot v)$ où $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est holomorphe. Les fonctions de transition correspondantes sont alors $g'_{ij} = \varphi_i g_{ij} \varphi_j^{-1}$.

A l'inverse, la donnée d'une famille d'applications holomorphes $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ satisfaisant la relation de cocycle (7.6) permet de construire un fibré vectoriel dont les fonctions de transition sont les g_{ij} . En effet, on pose $\hat{E} := \bigsqcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{C}^n$, et $\hat{\pi} : \hat{E} \rightarrow X$ la projection définie par $(x, v) \mapsto x$. On dit que $(x, v) \in U_i \times \mathbb{C}^n$ est équivalent à $(y, w) \in U_j \times \mathbb{C}^n$ si $x = y$ et $v = g_{ij}(x) \cdot w$. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence, et deux points dans le même $U_i \times \mathbb{C}^n$ sont équivalents si et seulement s'ils sont égaux. De plus, $\hat{\pi}$ induit une surjection $\pi : E \rightarrow X$ où $E = \hat{E} / \sim$. La projection de $\hat{E}$ vers E induit une bijection $h_i^{-1} : U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ et on vérifie que $\pi : E \rightarrow X$ est bien un fibré vectoriel de rang n .

Ceci permet de définir le dual E^* d'un fibré vectoriel E ou le produit tensoriel $E \otimes E'$ de deux fibrés vectoriels E, E' sur X . Pour le premier, on choisira comme fonctions de transitions $({}^t g_{ij}^{-1})$ et pour le second, $g_{ij} \otimes g'_{ij}$. On a bien sûr une interprétation plus intrinsèque, cf [1].

Proposition 7.2. *Soit L un fibré en droites. Alors $L \otimes L^*$ est isomorphe au fibré trivial.*

Preuve. On peut choisir des fonctions de transitions de $L \otimes L^*$ étant toutes égales à 1, d'où le résultat. Alternativement, on peut trouver une section s de $L \otimes L^*$ jamais nulle, fournissant la trivialisations attendue, qui envoie $x \in X$ sur $s(x) = v \otimes \ell$ où $v \in L_x \setminus \{0\}$ et ℓ est l'unique forme linéaire telle que $\ell(v) = 1$; s est bien définie. $\square$

Définition 7.3. Soit X une surface de Riemann, alors l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés en droite peut être muni d'une structure de groupe abélien. On l'appelle le groupe de Picard de X , noté $\mathrm{Pic}(X)$.

Proposition 7.4. *Soit X une surface de Riemann compacte. La suite exacte exponentielle induit une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Preuve. C'est une conséquence des trois faits suivants :

1. Le morphisme $\exp : \mathcal{O}_X(X) \simeq \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_X^*(X) \simeq \mathbb{C}^*$ est surjectif
2. On a $\check{H}^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, ce dernier étant un conséquence du Théorème de de Rham-Weil, cf Section 6.4.
3. On a $\check{H}^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ par dualité de Poincaré et comparaison des cohomologies. $\square$

Exemple 7.5. Soit X une surface de Riemann ; alors Ω_X^1 est le fibré en droites sur X dont les fonctions de transition sont les fonctions g_{ij} définies sur l'intersection de deux ouverts de coordonnées $(U_i, z_i), (U_j, z_j)$ par l'équation

$$dz_j = g_{ij} dz_i.$$

7.3 Sections

Définition 7.6. Une section d'un fibré holomorphe E sur un ouvert $U \subset E$ est la donnée d'une application holomorphe $s : U \rightarrow E$ telle que $\pi \circ s = \text{Id}_U$.

Lemme 7.7. La donnée d'une section s de E sur X est équivalente à celle d'une collection de fonction holomorphes $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ définies sur des ouverts U_i de trivialisations de E et vérifiant la relation suivante sur l'intersection U_{ij} :

$$f_i = g_{ij} \cdot f_j$$

On note $H^0(U, E)$ l'ensemble des sections de E au dessus de U .

Preuve. Si s est donnée, alors la section $s_i := s|_{U_i}$ induit $h_{U_i} \circ s_i : U_i \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ qui s'écrit $x \mapsto (x, f_i(x))$ avec f_i holomorphe sur U_i à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. Sur U_{ij} , on a $f_i(x) = \text{pr}_{\mathbb{C}^n}(h_{U_i} \circ s_i) = g_{ij} \cdot \text{pr}_{\mathbb{C}^n}(h_{U_j} \circ s_j) = g_{ij} \cdot f_j$.

Inversement, si de telles f_i sont données, on définit s_i sur U_i par $s_i(x) = h_{U_i}^{-1}(x, f_i(x))$. Sur U_{ij} , on a alors $s_j(x) = h_{U_j}^{-1}(x, g_{ij} \cdot f_j(x)) = s_i(x)$, d'où le résultat. $\square$

Définition 7.8. Soit E un fibré vectoriel. La correspondance $U \mapsto H^0(U, E)$ induit un faisceau en $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels, appelé faisceau des sections de E , et noté $\mathcal{O}_X(E)$. En fait, $\mathcal{O}_X(E)(U)$ est naturellement muni d'une structure plus riche de $\mathcal{O}_X(U)$ -module (de type fini).

Lemme 7.9. Soit L un fibré en droites. Alors $L \simeq X \times \mathbb{C}$ si et seulement si L admet une section holomorphe jamais nulle.

Preuve. Un sens est évident. Quant à l'autre, si $s \in H^0(X, L)$ ne s'annule jamais, alors le morphisme $X \times \mathbb{C} \rightarrow L$ défini par $(x, t) \mapsto t \cdot s(x)$ est un isomorphisme de fibrés en droites dont l'inverse est donné par $v \mapsto (\pi(v), v/s(\pi(v)))$. $\square$

Proposition 7.10. Soit E, F deux fibrés vectoriels de rang n sur une surface de Riemann compacte. Alors E est isomorphe à F si et seulement si les faisceaux $\mathcal{O}_X(E)$ et $\mathcal{O}_X(F)$ sont isomorphes comme $\mathcal{O}_X$ -modules.

Preuve. Soit $u : E \rightarrow F$ un isomorphisme de fibrés vectoriels. Il induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\varphi : \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{O}_X(F)$ défini par $\varphi_U(s) = u \circ s$.

Inversement, si on dispose d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules $\varphi : \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{O}_X(F)$, et d'un point $e \in E_x$, alors on choisit une section locale $s \in H^0(U, E)$ telle que $s(x) = e$, et on définit $u(e) := \varphi_U(s)(x)$. Pour voir que ceci est bien défini, on prend un repère local $(s_1, \dots, s_n)$ de E sur U et on écrit $s = \sum_{k=1}^n \lambda_k s_k$ avec $\lambda_k \in \mathcal{O}_X(U)$, $\sum_k \lambda_k(x) s_k(x) = e$. Pour toute autre section $s' \in H^0(U, E)$ telle que $s'(x) = e$, on écrit $s' = \sum_{k=1}^n \lambda'_k s_k$ avec $\lambda'_k(x) = \lambda_k(x)$. Alors, $\varphi_U(s') = \sum \lambda'_k \varphi_U(s_k)$ et donc $\varphi_U(s')(x) = \varphi_U(s)(x)$. L'application $u : E \rightarrow F$ ainsi définie est bien un isomorphisme de fibrés vectoriels. $\square$

Définition 7.11. Soit $E \rightarrow X$ un fibré holomorphe sur une surface de Riemann X . Une section méromorphe de E est la donnée d'un ensemble discret $\Sigma \subset X$ et d'une section $s \in H^0(X \setminus \Sigma, E)$ telle que pour tout point $x \in \Sigma$, il existe une trivialisation (U, z) autour de x et un entier $N \geq 0$ tels que $z^N s$ s'étende en une section holomorphe de E sur U , ie tels que $z^N s$ soit la restriction à $U \setminus \{x\}$ d'une section de E sur U .

Lemme 7.12. Soit L un fibré en droites holomorphe, et s_1, s_2 deux sections méromorphes non identiquement nulles de L sur un ouvert U . Alors il existe $f \in \mathcal{M}_X(U)$ telle que $s_1 = f \cdot s_2$.

Preuve. La donnée de s_1 (resp. s_2) correspond à la donnée de fonctions méromorphes $f_i^{(1)}$ (resp $f_i^{(2)}$) sur des ouverts trivialisants U_i tels que $f_i^{(1)} = g_{ij} f_j^{(1)}$ (et idem avec $f_i^{(2)}$). Alors on a sur chaque U_{ij} la relation $f_i^{(1)} / f_i^{(2)} = f_j^{(1)} / f_j^{(2)}$ d'où une fonction f méromorphe bien définie sur U telle que $s_1 = f s_2$. $\square$

7.4 Diviseurs

Définition 7.13. Soit X une surface de Riemann. Un diviseur D sur X est une application $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que le support de D est localement fini. On écrit

$$D = \sum_{x \in X} D(x)x;$$

si X est compacte, cette somme est finie. On définit la somme et la différence $D_1 + D_2$ de deux diviseurs par $(D_1 \pm D_2)(x) := D_1(x) \pm D_2(x)$. On dit que D est effectif si $D(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$. Étant donnés deux diviseurs D_1, D_2 , on dit que $D_1 \geq D_2$ si $D_1 - D_2$ est effectif. Le support de D , noté $\text{Supp}(D)$ est l'ensemble des points $x \in X$ tels que $D(x) \neq 0$.

Exemple 7.14. Soit f une fonction méromorphe sur une surface de Riemann X . Alors $\text{div}(f) := \sum_{x \in X} \text{ord}_x(f) \cdot x$ définit un diviseur sur X .

Plus généralement, si s est une section méromorphe d'un fibré vectoriel E , alors on peut définir $\text{div}(s) := \sum_{x \in X} \text{ord}_x(s) \cdot x$ où $\text{ord}_x(s)$ est défini comme l'entier $k \in \mathbb{Z}$ tel qu'on puisse écrire s localement dans une trivialisation près de x comme $z^k g$ avec g un n -uplet de fonctions holomorphes non toutes nulles en x .

Remarque 7.15. Une section méromorphe s d'un fibré vectoriel E est holomorphe si et seulement si $\text{div}(s) \geq 0$.

Proposition 7.16. Soit D un diviseur sur X . Alors il existe un fibré en droites $L(D)$ sur X et une section méromorphe s_D de $L(D)$ telle que $\text{div}(s_D) = D$.

Preuve. Soit $D = \sum_{i \in I} n_i x_i$ un diviseur sur une surface de Riemann X et $\Sigma := \text{Supp}(D)$. On se donne un recouvrement $\mathcal{U} = \{(U_i)_{i \in I}, U_\infty\}$ de X par des ouverts satisfaisant

1. Si $i \in I$, $U_i \ni x_i$ est un ouvert muni d'une coordonnée $z_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ centrée en x_i .
2. Si $i, j \in I$ sont distincts, $U_i \cap U_j = \emptyset$.
3. $U_\infty = X \setminus \Sigma$.

Sur U_i , $i \in I$, on définit la fonction méromorphe $f_i := z_i^{n_i}$. Sur U_∞ , on pose $f_\infty = 1$. On définit les fonctions méromorphes g_{ij} sur U_{ij} par $g_{ij} = f_i/f_j$. On vérifie facilement que ces fonctions holomorphes jamais nulles définissent un cocycle, et donc un fibré en droites que l'on note $L(D)$. Enfin, il est clair que la collection de fonctions méromorphes $(f_i)_{i \in I}$ induit une section méromorphe s_D de $L(D)$ sur X telle que $\text{div}(s_D) = D$. $\square$

Remarque 7.17. Si on avait utilisé d'autres cartes (U_i) satisfaisant les propriétés 1 – 3 ci-dessus, on aurait trouvé un fibré en droites L' dont les cocycles g'_{ij} vérifient $g'_{ij} = \varphi_i g_{ij} \varphi_j^{-1}$ pour des fonctions holomorphes inversibles φ_i sur U_i , et alors on aurait bien $L' \simeq L(D)$.

Remarque 7.18. Deux sections méromorphes d'un fibré en droites donné ayant même diviseur diffèrent par une fonction holomorphe inversible. En particulier, si X est compacte, la section s_D de la Proposition 7.16 est unique à constante multiplicative près.

Proposition 7.19. La construction $D \mapsto L(D)$ possède les propriétés suivantes :

1. $L(D_1 + D_2) \simeq L(D_1) \otimes L(D_2)$.
2. $L(-D) \simeq L(D)^*$
3. Si L est un fibré en droites admettant une section méromorphe s non identiquement nulle, de diviseur $D := \text{div}(s)$. Alors $L \simeq L(D)$.

Preuve. Les deux premiers points sont évidents en utilisant les fonctions de transition introduites plus haut. Quant au dernier, soit s_{-D} la section méromorphe canonique associée à $-D$. Alors $s \otimes s_{-D}$ est une section méromorphe de $L \otimes L(-D)$ dont le diviseur est nulle, ie s ne s'annule jamais. Ainsi, $L \otimes L(-D)$ est trivial, et donc grâce au point 2 et à la Proposition 7.2, on conclut que $L \simeq L(-D)^* = L(D)$. $\square$

7.5 Faisceaux divisoriels

Soit D un diviseur sur une surface de Riemann X . On définit le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ comme suit : si $U \subset X$ est un ouvert, alors

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in \mathcal{M}_X(U); \text{div}(f) \geq -D|_U\}.$$

Il s'agit bien d'un faisceau en espaces vectoriels complexes.

Exemple 7.20. Soit D un diviseur effectif sur une surface de Riemann compacte X . Alors

$$\mathcal{O}_X(-D)(X) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } D = 0 \\ \{0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 7.21. Soit D un diviseur sur X . On a un isomorphisme de faisceaux

$$\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(L(D)).$$

entre le faisceau divisoriel associé à D et le faisceau des sections du fibré en droites $L(D)$.

Preuve. Soit s_D une section méromorphe de $L(D)$ de diviseur D . Alors la correspondance

$$\mathcal{O}_X(D)(U) \ni f \mapsto f \cdot s_D \in \mathcal{O}_X(L(D))(U) = H^0(U, L(D))$$

est clairement un isomorphisme. $\square$

Proposition 7.22. *Soient D_1, D_2 deux diviseurs sur une surface de Riemann X . Alors les fibrés vectoriels $L(D_1)$ et $L(D_2)$ sont isomorphes si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{M}_X(X)$ telle que $D_1 - D_2 = \text{div}(f)$.*

Preuve. Par la Proposition 7.10, si une telle fonction f existe, il suffit de montrer que les $\mathcal{O}_X$ -modules $\mathcal{O}_X(D_1)$ et $\mathcal{O}_X(D_2)$ sont isomorphes. Mais alors le morphisme $s \mapsto f \cdot s$ fournit un tel isomorphisme.

Inversement, s'il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -module $\varphi : \mathcal{O}_X(D_1) \rightarrow \mathcal{O}_X(D_2)$, alors $\varphi_X(s_{D_1})$ est une section méromorphe non-nulle de $\mathcal{O}_X(D_2)$, et par le Lemme 8.3, il existe $f \in \mathcal{M}_X(X)$ telle que $\varphi_X(s_{D_1}) = f \cdot s_2$. Comme φ est un isomorphisme, $\text{div}(\varphi_X(s_{D_1})) = \text{div}(s_{D_1}) = D_1$ et donc $\text{div}(f) = D_1 - D_2$. $\square$

Définition 7.23. On dit que deux diviseurs D_1, D_2 sont linéairement équivalents s'il existe $f \in \mathcal{M}_X(X)$ telle que $D_1 - D_2 = \text{div}(f)$

Exemple 7.24. Soient $x, y \in \mathbb{P}^1$. Alors les diviseurs (x) et (y) sont linéairement équivalents.

8 Théorèmes de finitude

Théorème 8.1. *Soit $\pi : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann compacte X . Alors $H^0(X, E)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.*

Preuve. On recouvre X par des cartes $(U_i, z_i)_{1 \leq i \leq N}$ telles que $z_i : U_i \rightarrow \Delta$ est un isomorphisme et telles que les $V_i := z_i^{-1}(\{|z| < 1/2\})$ recouvrent X également. De plus, on suppose qu'il existe des voisinages $\overline{W_i}$ de $\overline{U_i}$ et des trivialisations $h_i : \pi^{-1}(W_i) \rightarrow W_i \times \mathbb{C}^n$. On note g_{ij} les fonctions de transition sur W_{ij} .

Ainsi, toute section $s \in H^0(X, E)$ est représentée par une collection $(f_i)_{1 \leq i \leq N}$ de fonctions holomorphes $f_i : W_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ telles que

$$f_i(x) = g_{ij}(x) \cdot f_j(x) \quad \text{pour } x \in W_{ij}.$$

On définit $\|s\|_U := \max_i \sup_{x \in U_i} |f_i(x)|$ et de même pour $\|s\|_V = \max_i \sup_{x \in V_i} |f_i(x)|$. Ainsi, il existe $i \in I$ et $x_0 \in \overline{U_i}$ tel que $\|s\|_U = |f_i(x_0)|$. On choisit $j \in J$ tel que $x_0 \in V_j$ de sorte que $|f_i(x_0)| = |g_{ij}(x_0)f_j(x_0)| \leq \|g_{ij}(x_0)\| \cdot \|s\|_V$. En notant $C = \max_{i,j} \sup_{x \in U_{ij}} \|g_{ij}(x)\|$, on obtient finalement

$$(8.7) \quad \|s\|_U \leq C \cdot \|s\|_V$$

Soit $a_i \in U_i$ le point tel que $z_i(a_i) = 0$. Soit $s \in H^0(X, E)$ une section telle que $\text{ord}_{a_i}(s) \geq k$ pour un certain entier $k \geq 0$ et pour tout $i \in I$. Alors $\frac{f_i}{z_i^k}$ est holomorphe sur U_i et ainsi

$$\sup_{V_i} \left| \frac{f_i}{z_i^k} \right| \leq \sup_{\partial U_i} |f_i| \leq \|s\|_U$$

d'où, pour $x \in V_i$,

$$|f_i(x)| \leq \sup_{z_i \in V_i} \left(|z_i|^k \left| \frac{f_i}{z_i^k} \right| \right) \leq 2^{-k} \|s\|_U.$$

En conclusion, l'inégalité (8.7) montre qu'on a pour une telle section s

$$\|s\|_V \leq 2^{-k} C \|s\|_V$$

et donc $s = 0$ si $k > \log_2 C$. Ainsi, pour un tel k , l'application

$$\begin{aligned} H^0(X, E) &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{C}^n \otimes (\mathcal{O}_{X, a_i} / \mathfrak{m}^k) \\ s &\longmapsto \bigoplus_{i=1}^N (f_i \bmod z_i^k) \end{aligned}$$

est injective, d'où le théorème. $\square$

Soit $\pi : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe. On note $H^1(X, E)$ l'espace vectoriel $\check{H}^1(X, \mathcal{O}_X(E))$. On a alors le théorème suivant

Théorème 8.2. *Soit $\pi : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann compacte X . Alors l'espace vectoriel complexe $H^1(X, E)$ est de dimension finie.*

Preuve. Si U est un ouvert trivialisant de E , on dispose de $h_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$. Alors on considère pour tout ouvert $V \Subset U$ relativement compact l'espace $E_b(V)$ des sections de E sur V qui sont bornées (relativement à la trivialisatation h_U , mais cette notion est indépendante de la trivialisatation). On peut ainsi munir $E_b(V)$ d'une structure d'espace de Banach via $\|s\| := \sup_{x \in V} |\text{pr}_2(h_U \circ s(x))|$.

De plus, si U est analytiquement isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$, alors on a $H^1(U, E) = 0$ grâce au Théorème 6.24 et au fait que $\mathcal{O}_X(E)|_U \simeq \mathcal{O}_U^{\oplus n}$.

On note $\Delta(r) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$ pour $r > 0$. On choisit une famille finie trivialisante $(W_i, z_i)_{1 \leq i \leq N}$ de X et E telle que la trivialisatation $h_i : \pi^{-1}(W_i) \rightarrow W_i \times \mathbb{C}^n$ satisfait aux propriétés suivantes

1. La fonction z_i induit un isomorphisme $W_i \xrightarrow{\sim} \Delta(2)$.

2. En posant $U_i(r) := z_i^{-1}(\Delta(r))$, on a $\bigcup_{i \in I} U_i(\frac{1}{2}) = X$.

Pour $r \in [\frac{1}{2}, 1]$, on note $\mathcal{U}(r)$ le recouvrement $(U_i(r))_{i \in I}$ de X . Si $x \in X$ et $v \in E_x$, on note $|v| := |\text{pr}_2(h_i(v))|$. On considère maintenant les espaces

$$Z_b^1(r) = \{\xi = (f_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}(r), E); \forall i, j \in I, f_{ij} \in E_b(U_{ij}(r))\}$$

et

$$C_b^0(r) = \{\gamma = (c_i) \in C^0(\mathcal{U}(r), E); \forall i \in I, c_i \in E_b(U_i(r))\}$$

qu'on munit des normes

$$\|\xi\|_r := \max_{i,j} \sup_{x \in U_{ij}(r)} |h_i(f_{ij}(x))|$$

et

$$\|\gamma\|_r := \max_i \sup_{x \in U_i(r)} |h_i(c_i(x))|$$

rendant les espaces en question de Banach. Soit $\rho \in [\frac{1}{2}, r)$; on a que si $\gamma \in C^0(\mathcal{W}(r), E)$ est tel que $\delta\gamma \in Z_b^1(\mathcal{W}(r), E)$, alors $\gamma \in C_b^0(\mathcal{W}(r), E)$ et de plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\gamma\|_r \leq \|\delta\gamma\|_r + C\|\gamma\|_\rho.$$

Pour voir cette inégalité, on prend $\gamma = (c_i) \in C^0(\mathcal{W}(r), E)$ et $x_0 \in U_i(r)$. On choisit alors $j \in I$ tel que $x_0 \in U_j(\rho)$. Ainsi, on a $c_i(x_0) = (c_i - c_j)(x_0) + c_j(x_0)$ et $h_i(c_j(x_0)) = g_{ij} \circ h_j(c_j(x_0))$. En notant $C = \max_{i,j} \sup_{U_{ij}(1)} \|g_{ij}\|$, on obtient

$$\begin{aligned} |h_i(c_i(x_0))| &\leq |h_i((c_i - c_j)(x_0))| + |h_i(c_j(x_0))| \\ &\leq \|\delta\gamma\|_r + C\|\gamma\|_\rho \end{aligned}$$

On note $H_b^1(r) = Z_b^1(r)/C_b^0(r)$. L'application naturelle

$$H_b^1(s) \longrightarrow Z^1(\mathcal{W}(s), E)/\delta C^0(\mathcal{W}(s), E) = H^1(\mathcal{W}(s), E) \simeq H^1(X, E)$$

est un isomorphisme si $s \in [\frac{1}{2}, 1]$. L'injectivité vient de la remarque ci-dessus. Pour la surjectivité, on utilise le théorème de Leray qui montre que les applications de raffinement induisent un isomorphisme $H^1(\mathcal{W}(2), E) \rightarrow H^1(\mathcal{W}(s), E)$. De plus, les applications de restriction

$$Z^1(\mathcal{W}(2), E) \rightarrow Z_b^1(s) \rightarrow Z^1(\mathcal{W}(s), E)$$

passent aux quotients et donc l'isomorphisme $H^1(\mathcal{W}(2), E) \rightarrow H^1(\mathcal{W}(s), E)$ se factorise par $H_b^1(s)$. De plus, l'argument montre que l'application de restriction $H_b^1(1) \rightarrow H_b^1(s)$ est un isomorphisme, et il en découle que l'application de restriction $Z_b^1(1) \rightarrow H_b^1(s)$ est surjective.

Soit maintenant N un entier ≥ 1 , et posons $C^0(r, N) := \{\gamma = (c_i) \in C_b^0(r); \text{ord}_{a_i}(c_i) \geq N\}$ où $a_i = z_i^{-1}(0)$. Par le lemme de Schwarz, on a pour tout $\gamma \in C^0(r, N)$ l'inégalité

$$\|\gamma\|_\rho \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^N \|\gamma\|_r$$

et donc, en choisissant N de sorte que $C \left(\frac{\rho}{r}\right)^N \leq \frac{1}{2}$, on obtient que pour tout $\gamma \in C^0(r, N)$, alors $\|\gamma\|_r \leq 2\|\delta\gamma\|_r$. On en déduit que le sous-espace $\delta C^0(r, N) \subset Z_b^1(r)$ est complet donc fermé. De plus, $C^0(r, N)$ est de codimension finie dans $C_b^0(r)$ comme le noyau de l'application linéaire $\gamma \mapsto (\gamma \bmod \mathfrak{m}_{a_i}^N)_{i \in I}$, à valeurs dans $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}^{(N+1)n}$. Par le Lemme 8.7, $\delta C_b^0(r)$ est fermé dans $Z_b^1(r)$. En conclusion, $H_b^1(r)$ est bien un espace de Banach (séparé).

Par le théorème de Montel, l'application de restriction $Z_b^1(1) \rightarrow Z_b^1(r)$ est compacte, ainsi l'application induite $Z_b^1(1) \rightarrow H_b^1(r)$ est à la fois compacte et surjective. Par le théorème de l'application ouverte, cette dernière application est ouverte et donc $H_b^1(r)$ admet un voisinage de 0 relativement compact, ce qui implique que $H_b^1(r) \simeq H^1(X, E)$ est de dimension finie. $\square$

Théorème 8.3. *Soit X une surface de Riemann compacte et $\pi : L \rightarrow X$ un fibré en droites holomorphe. Alors, L admet une section méromorphe non holomorphe. Par conséquent*

1. *Tout fibré en droites L est isomorphe à un fibré $L(D)$ pour un certain diviseur D sur X .*
2. *Il existe une fonction méromorphe non-constante sur X .*
3. *Il existe une 1-forme méromorphe non-nulle sur X .*

Preuve. Soit $x \in X$ et (U, z) un ouvert trivialisant avec une coordonnée z s'annulant en x , et enfin une trivialisatation de L qu'on note $h_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}$.

Soit $k \geq 1$ un entier, et soit s_k la section méromorphe de L sur U donnée par z^{-k} via h_U . On considère le recouvrement $\mathcal{U} := \{U, X \setminus \{x\}\}$ et on définit $f_{12}^{(k)} = s_k|_{U \setminus \{x\}}$, $f_{21}^{(k)} := -f_{12}^{(k)}$ et $f_{ij}^{(k)} := 0$ sinon. Ceci définit un élément $f^{(k)} \in Z^1(\mathcal{U}, L)$. Comme $H^1(X, L)$ est de dimension finie, et $H^1(\mathcal{U}, L) \hookrightarrow H^1(X, L)$, il existe un entier $d \geq 0$ (on peut choisir $d = \dim H^1(X, L) + 1$) et des constantes $c_1, \dots, c_d$ non toutes nulles telles que

$$c_1 f^{(1)} + \dots + c_d f^{(d)} \in B^1(\mathcal{U}, L)$$

c'est-à-dire qu'il existe des sections holomorphes u_1, u_2 de L sur U et $X \setminus \{x\}$ respectivement telles que

$$c_r s_r + \dots + c_d s_d = u_1 - u_2 \quad \text{sur} \quad U \setminus \{x\}$$

avec $c_r \neq 0$. La section $s = u_2$ de L sur $X \setminus \{x\}$ s'étend alors en une section méromorphe non holomorphe de L sur X car sur $U \setminus \{x\}$, on a $s = u_1 - \sum_{i=r}^d c_i s_i$. $\square$

Remarque 8.4. L'argument ci-dessous montre que si on note $g = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$, alors on peut trouver une fonction méromorphe f holomorphe sur $X \setminus \{x\}$ avec un pôle d'ordre au plus $g + 1$ en x .

Définition 8.5. Soit X une surface de Riemann compacte et L un fibré en droites holomorphe sur X . On appelle degré de L , noté $\deg(L)$, le degré de tout diviseur D tel que $L \simeq L(D)$. De manière équivalente, $\deg(L)$ correspond au degré du diviseur de n'importe quelle section méromorphe non constante de L . Cette définition a bien un sens d'après le Théorème 3.14 et la Proposition 7.22.

Annexe : Quelques résultats d'analyse fonctionnelle

Lemme 8.6. *Soient $F \subset E$ un sous-espace de dimension finie d'un espace de Banach E . Alors F est fermé.*

Preuve. Soit N la norme de E . Alors $N|_F$ est une norme sur F , donc nécessairement équivalente à une norme euclidienne (induite par le choix d'une base de F par exemple). Ainsi F est complet, donc fermé dans E . $\square$

Lemme 8.7. *Soient $F \subset E$ un sous-espace fermé de codimension finie d'un espace de Banach E , et soit $u : E \rightarrow G$ une application continue vers un espace de Banach G . Si $u(F)$ est fermé, alors $u(E)$ est également fermé.*

Preuve. Soit $H := G/u(F)$ l'espace de Banach muni de sa projection canonique $p : G \rightarrow H$. On a $u(E) = p^{-1}(\bar{u}(E))$ où $\bar{u} : E \rightarrow H = G/u(F)$ est l'application quotient induite par u . L'espace $\bar{u}(E)$ est de dimension finie car $\bar{u}$ se factorise par $E/F \rightarrow H$. Le Lemme 8.6 montre alors que $\bar{u}(E) \subset H$ est fermé, et donc $u(E) \subset G$ l'est également. $\square$

Lemme 8.8. *Soient V, W deux espaces de Fréchet et $u : V \rightarrow W$ une application continue. Si $\dim(W/u(V)) < +\infty$, alors $u(V)$ est fermé dans W .*

Preuve. Comme $\text{Ker } u$ est fermé, $V/\text{Ker } u$ est un espace de Fréchet et on peut alors se ramener au cas où u est injective. On choisit $W_0 \subset W$ un sous-espace de dimension finie telle que la projection $W_0 \rightarrow W/u(V)$ soit un isomorphisme algébrique. Alors W_0 est fermé dans W . En effet, le choix d'une base de W_0 induit une application continue bijective $f : \mathbb{C}^k \rightarrow W_0$ qui envoie la sphère unité euclidienne sur un compact, donc un fermé de W_0 ne contenant pas l'origine. Ainsi, si $f(x_n) \rightarrow 0$, on a nécessairement $x_n \rightarrow 0$ et donc f est un homéomorphisme. Ainsi W_0 est complet et donc fermé dans W . L'application $W_0 \oplus V \rightarrow W$ définie par $(w, v) \mapsto w + u(v)$ est une bijection continue, et donc un homéomorphisme par le théorème de l'image ouverte. Comme V est fermé dans $W_0 \oplus V$, son image est fermée dans W . $\square$

9 Isomorphisme de Dolbeault

Soit X une surface de Riemann ; on considère le faisceau $\mathcal{C}_X^\infty$ des fonctions lisses sur X . De plus, rappelons qu'on note $\Omega_X^{p,q}$ le fibré vectoriel des (p, q) -formes sur X . On en déduit alors son faisceau des sections lisses noté $\mathcal{A}_X^{p,q}$.

Plus généralement, si $E \rightarrow X$ est un fibré vectoriel différentiable sur X , on note $\mathcal{C}_E^\infty$ le faisceau des sections lisses de E . On définit le fibré des (p, q) -formes à valeurs dans E comme étant $\Omega_X^{p,q} \otimes E$. C'est un fibré vectoriel différentiable, et on note $\mathcal{A}_E^{p,q}$ le faisceau des sections lisses de $\Omega_X^{p,q} \otimes E$. En d'autres termes, on a

$$\mathcal{A}_E^{p,q}(U) := \mathcal{C}_E^\infty(U) \otimes_{\mathcal{C}_X^\infty(U)} \mathcal{A}_X^{p,q}(U)$$

pour tout ouvert $U \subset X$. On peut définir un opérateur $\bar{\partial}_E : \mathcal{O}_X(E) \rightarrow \mathcal{A}_E^{0,1}$ localement en utilisant des trivialisations. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est un repère local holomorphe de E sur U ouvert trivialisant, alors toute section lisse locale s de E sur U s'écrit $s = \sum_i f_i e_i$ où $f_i \in \mathcal{C}_X^\infty(U)$. Alors on pose

$$\bar{\partial}_E(s) := \sum_i \bar{\partial} f_i \otimes e_i.$$

Il faut vérifier que cette définition est indépendante du choix du repère holomorphe. Si $(e'_1, \dots, e'_n)$ est un autre repère local, alors il existe une matrice inversible (g_{ij}) de fonctions holomorphes sur U telle que $e_i = \sum_j g_{ij} e'_j$ et alors $s = \sum_{i,j} g_{ij} f_i e'_j = \sum_j f'_j e'_j$ avec

$f'_j := \sum_i g_{ij} f_i$. Mais comme $\bar{\partial}(g_{ij} f_i) = g_{ij} \bar{\partial} f_i$, on a

$$\begin{aligned} \sum_j \bar{\partial} f'_j \otimes e'_j &= \sum_j \bar{\partial} \left[\sum_i g_{ij} f_i \right] \otimes e'_j \\ &= \sum_j \sum_i g_{ij} \bar{\partial} f_i \otimes e'_j \\ &= \sum_i \bar{\partial} f_i \otimes e_i \end{aligned}$$

Théorème 9.1. *Soit $\pi : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann X , et soit*

$$\bar{\partial}_E : \mathcal{C}_E^\infty(X) \rightarrow \mathcal{A}_E^{0,1}(X).$$

Alors on a $\ker(\bar{\partial}) = H^0(X, E)$ et $\text{coker}(\bar{\partial})$ est naturellement isomorphe à $H^1(X, E)$.

Preuve. La première assertion est triviale. Comme le faisceau $\mathcal{C}_E^\infty$ admet des partitions de l'unité, il n'a pas de cohomologie supérieure, cf preuve du Théorème 6.24. Alors, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(E) \hookrightarrow \mathcal{C}_E^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \mathcal{A}_E^{0,1} \longrightarrow 0$$

donne le résultat attendu.

On peut donner une construction plus explicite de l'isomorphisme $D : H^1(X, E) \rightarrow \mathcal{A}_E^{0,1}(X)/\mathcal{C}_E^\infty(X)$. Si $(s_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, E)$ pour un recouvrement $\mathcal{U}$ suffisamment fin, alors il existe $\phi_i \in \mathcal{C}_E^\infty(U_i)$ telles que $\phi_i - \phi_j = s_{ij}$ sur U_{ij} . On définit alors $D((s_{ij})) := (\bar{\partial}\phi_i)_{i \in I}$. $\square$

Comme conséquence du Théorème 6.2, du Théorème 8.2 et du Lemme 8.8, on a le résultat suivant

Corollaire 9.2. *L'espace $\bar{\partial}\mathcal{C}_E^\infty(X)$ est fermé dans $\mathcal{A}_E^{0,1}(X)$.*

10 Dualité de Serre

10.1 Accouplement

Soit X une surface de Riemann compacte. Rappelons que K_X est le fibré en droites défini comme le fibré Ω_X^1 , ou encore le fibré en droites holomorphe dont les sections sont les 1-formes holomorphes. Soit maintenant E un fibré vectoriel holomorphe, et dénotons E^* son dual (défini via ses fonctions de transition, étant la transposée de l'inverse de celles de E). On a un accouplement naturel

$$\langle , \rangle : H^0(X, E^* \otimes K_X) \times \mathcal{A}_E^{0,1}(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

défini comme suit. Soit U un ouvert trivialisant pour U et E , et soit dz la trivialisation de K_X associée. Si $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$ et $\varphi \in \mathcal{A}_E^{0,1}(X)$, alors $s|_U = \lambda \otimes dz$ avec $\lambda \in H^0(U, E^*)$ et $\varphi|_U = \alpha \otimes d\bar{z}$ avec $\alpha \in \mathcal{C}_E^\infty(U)$. La 2-forme $\lambda(\alpha) dz \wedge d\bar{z}$ est alors indépendante du choix

de la trivialisation z . En effet, si w est une autre trivialisation sur U , alors on peut écrire $s|_U = \lambda' \otimes dw$ et $\varphi|_U = \alpha' \otimes d\bar{w}$ avec $\lambda = \lambda' \cdot w'(z)$ et $\alpha = \alpha' \cdot \overline{w'(z)}$ de sorte que

$$\lambda'(\alpha')dw \wedge d\bar{w} = \lambda(\alpha)dz \wedge d\bar{z}$$

On note (s, φ) la 2-forme ainsi obtenue sur X , et on définit

$$\langle s, \varphi \rangle := \int_X (s, \varphi).$$

Lemme 10.1. *Soit $f \in \mathcal{C}_E^\infty(X)$ et $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$. Alors*

$$\langle s, \bar{\partial}f \rangle = 0.$$

Preuve. En utilisant des partitions de l'unité, on peut se ramener au cas où f est à support dans un ouvert trivialisant U . On choisit alors un repère local holomorphe (e_i) pour E , induisant un repère (e_i^*) pour E^* . On écrit $f = \sum f_i e_i$ et $s = \sum \lambda_i e_i^* \otimes dz$. Alors

$$\begin{aligned} (s, \bar{\partial}f) &= \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \\ &= d \left[\left(\sum_i \lambda_i f_i \right) dz \right] \end{aligned}$$

et par le théorème de Stokes, on a bien $\langle s, \bar{\partial}f \rangle = 0$. □

10.2 Théorème de régularité pour $\bar{\partial}$

On voudrait maintenant établir une sorte de réciproque du Lemme 10.1. Pour cela, on considère $(\mathcal{A}_E^{0,1})^*$ le dual topologique de $\mathcal{A}_E^{0,1}$, à savoir l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathcal{A}_E^{0,1}$ pour la topologie de convergence $\mathcal{C}^\infty$ sur tous les compacts des ouverts de coordonnées de X .

Théorème 10.2 (Lemme de Weyl). *Soit $F \in (\mathcal{A}_E^{0,1})^*$ telle que $F|_{\bar{\partial}C_E^\infty(X)} \equiv 0$. Alors il existe $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$ telle que*

$$F = \langle s, \cdot \rangle.$$

Remarque 10.3. Si $E = \mathcal{O}_X$ est trivial et X est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors F est essentiellement une distribution telle que $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ au sens faible ; et la conclusion est que F est représentée par une fonction holomorphe.

Avant de commencer la preuve du Théorème 10.2, montrons que cet énoncé est local.

Lemme 10.4. *Supposons que pour tout ouvert $U \subset X$ trivialisant, il existe une section $s_U \in H^0(U, E^* \otimes K_X)$ telle que $F(\varphi) = \langle s_U, \varphi \rangle$ pour toute $\varphi \in \mathcal{A}_E^{0,1}(U)$ avec $\text{Supp}(\varphi) \subset U$. Alors la conclusion du lemme de Weyl est satisfaite.*

Preuve. Commençons par montrer que les s_U se recollent en une section holomorphe $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$. En se plaçant sur un ouvert $V = U \cap U'$ à l'intersection de deux ouverts de coordonnées U, U' , considérons $\sigma := s_U|_V - s_{U'}|_V$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}_E^{0,1}(V)$ avec $\text{Supp}(\varphi) \subset V$, on a $\langle \sigma, \varphi \rangle = 0$.

On écrit $\sigma = i \sum_k \lambda_k e_k^* \otimes dz$, et on choisit $\varphi = \chi \cdot \sum_k \bar{\lambda}_k e_k \otimes d\bar{z}$ pour χ une fonction positive lisse à support dans V . Alors $(\sigma, \varphi) = \chi \cdot (\sum_k |\lambda_k|^2) \cdot i dz \wedge d\bar{z}$ et donc $\sigma \equiv 0$ sur $\text{Supp}(\chi)$. Par le principe des zéros isolés, $\sigma \equiv 0$ sur V , ce qui conclut.

Enfin, si $\varphi \in \mathcal{A}_E^{0,1}(X)$, alors on peut écrire $\varphi = \sum \varphi_U$ avec $\text{Supp}(\varphi_U) \subset U$ et le lemme s'ensuit. $\square$

On fixe donc un ouvert trivialisant U pour X et E , et on se donne une repère holomorphe $(e_1, \dots, e_n)$ de E sur U . On veut voir qu'il existe des fonctions holomorphes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur U telles que pour tout $\varphi = \alpha \otimes d\bar{z} = \sum \alpha_k e_k \otimes d\bar{z}$ avec $\text{Supp}(\varphi) \Subset U$, on ait

$$F(\varphi) = \int_U \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \alpha_k dz \wedge d\bar{z}.$$

On peut définir une forme multilinéaire G sur $\mathcal{C}_0^\infty(U)$ par

$$G(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := F\left(\sum \alpha_k e_k \otimes d\bar{z}\right)$$

vérifiant $G(\frac{\partial \beta_1}{\partial z}, \dots, \frac{\partial \beta_n}{\partial z}) = 0$ pour tous $\beta_i \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$. En considérant $G(0, \dots, 0, \cdot, 0, \dots, 0)$, on voit qu'on peut alors se ramener au cas où $n = 1$, qui est l'objet du théorème suivant

Théorème 10.5. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné, et soit $T : \mathcal{C}_0^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire satisfaisant aux deux conditions suivantes*

1. *Si $\alpha_n \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ est une suite telle que $\text{Supp}(\alpha_n) \subset K \Subset U$ pour un certain compact K et $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$, alors $T(\alpha_n) \rightarrow T(\alpha)$.*
2. *Si $\beta \in C_0^\infty(U)$, alors $T(\frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}}) = 0$.*

Alors il existe $\lambda \in \mathcal{O}(U)$ telle que $T(\alpha) = \int_U \lambda \alpha dz \wedge d\bar{z}$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, on définit $U_\varepsilon := \{z \in U; d(z, \partial U) > \varepsilon\}$. On considère une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{C})$ valant 1 sur $\{|z| < \frac{\varepsilon}{2}\}$, 0 sur $\{|z| \geq \varepsilon\}$ et telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ partout.

Étant donnée $\alpha \in \mathcal{C}_0^\infty(U_\varepsilon)$, on définit $\bar{\alpha} \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ par

$$\bar{\alpha}(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \alpha(z+w) \frac{\varphi(w)}{w} dw \wedge d\bar{w}.$$

Soit Δ_δ un petit disque autour de 0. Alors on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \bar{z}}(z) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus \Delta_\delta} \frac{\partial \alpha(z+w)}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\varphi(w)}{w} dw \wedge d\bar{w} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus \Delta_\delta} \frac{\partial \alpha(z+w)}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\varphi(w)}{w} dw \wedge d\bar{w} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus \Delta_\delta} d \left[-\alpha(z+w) \cdot \frac{\varphi(w)}{w} dw \right] - \alpha(z+w) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{\varphi(w)}{w} \right) dw \wedge d\bar{w} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(z + \delta e^{i\theta}) \cdot \varphi(\delta e^{i\theta}) d\theta - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus \Delta_\delta} \alpha(z+w) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{\varphi(w)}{w} \right) dw \wedge d\bar{w} \\
&= \alpha(z) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \alpha(z+w) \cdot \rho(w) dw \wedge d\bar{w} \\
&= \alpha(z) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \alpha(w) \cdot \rho(w-z) dw \wedge d\bar{w}
\end{aligned}$$

où $\rho(w) = \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{\varphi(w)}{w} \right)$, $w \neq 0$, $\rho(0) = 0$ est lisse et à support dans $\{|w| \leq \varepsilon\}$. On définit la fonction λ sur U_ε par $\lambda(w) = T(z \mapsto \rho(w-z))$.

On peut écrire l'intégrale $\int_{\mathbb{C}} \alpha(w) \cdot \rho(w-z) dw \wedge d\bar{w} = \int_{U_\varepsilon} \alpha(w) \cdot \rho(w-z) dw \wedge d\bar{w}$ comme limite pour la topologie $\mathcal{C}^\infty$ de sommes de Riemann du type $\alpha_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_z(x_k)$ pour des points $x_k \in U_\varepsilon$ et avec $f_z := \alpha(\cdot) \rho(\cdot - z)$ vérifiant $f_z(w) = 0$ si $w \in U_\varepsilon$ et $d(z, \text{Supp}(\alpha)) > \varepsilon$. Ainsi, $\text{Supp}(\alpha_n) \subset K \Subset U$ pour un certain compact K dépendant de α . On en déduit que pour tout $\alpha \in \mathcal{C}_0^\infty(U_\varepsilon)$, on a

$$T(\alpha) = \frac{1}{2i\pi} \int_U \alpha(w) \lambda(w) dw \wedge d\bar{w}.$$

Ensuite, on peut voir que $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(U_\varepsilon)$ en reprenant la définition de la dérivée et utilisant le même genre d'arguments que précédemment. Enfin, si $\beta \in \mathcal{C}_0^\infty(U_\varepsilon)$, on a

$$0 = T\left(\frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_U \frac{\partial \beta}{\partial \bar{w}} \lambda(w) dw = -\frac{1}{2i\pi} \int_U \beta(w) \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{w}} dw$$

d'où $\lambda \in \mathcal{O}(U_\varepsilon)$. □

10.3 Dualité de Serre

Soit X une surface de Riemann compacte et $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe. Rappelons qu'on a un isomorphisme de Dolbeault

$$D : H^1(X, E) \longrightarrow \mathcal{A}_E^{0,1}(X) / \bar{\partial} \mathcal{C}_E^\infty(X)$$

Ceci permet de définir une forme bilinéaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_E : H^0(X, E^* \otimes K_X) \times H^1(X, E) \rightarrow \mathbb{C}$$

en posant $\langle s, \xi \rangle_E := \langle s, D(\xi) \rangle$ pour $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$ et $\xi \in H^1(X, E)$.

Théorème 10.6 (Dualité de Serre). *L'accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ est non-dégénéré et induit un isomorphisme*

$$H^0(X, E^* \otimes K_X) \simeq H^1(X, E)^*.$$

Preuve. Soit $\ell : A_E^{0,1}(X)/\bar{\partial}\mathcal{C}_E^\infty(X) \rightarrow \mathbb{C}$ une forme $\mathbb{C}$ -linéaire arbitraire. Par le Théorème 9.1, $\bar{\partial}C_E^\infty(X) \subset A_E^{0,1}(X)$ est fermé et de codimension finie, ainsi $A_E^{0,1}(X)/\bar{\partial}\mathcal{C}_E^\infty(X)$ est naturellement un espace vectoriel topologique séparé de dimension finie, et donc ℓ est automatiquement continue. En particulier, l'application linéaire $F : A_E^{0,1}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $F(\varphi) := \ell(\{\varphi\})$ (où $\{\varphi\}$ est l'image de φ dans $A_E^{0,1}(X)/\bar{\partial}\mathcal{C}_E^\infty(X)$ par la projection canonique) est continue et nulle sur $\bar{\partial}\mathcal{C}_E^\infty(X)$. D'après le lemme de Weyl, il existe $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$ tel que

$$\ell(\{\varphi\}) = F(\varphi) = \langle s, \varphi \rangle = \langle s, \{\varphi\} \rangle \quad \forall \varphi \in A_E^{0,1}(X).$$

Comme D est un isomorphisme, ceci prouve que l'application $H^0(X, E^* \otimes K_X) \rightarrow H^1(X, E)^*$ induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ est surjective. Quant à l'injectivité, elle découle des arguments présents dans la preuve du Lemme 10.4. $\square$

Corollaire 10.7. *Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur une surface de Riemann compacte X . Il existe un isomorphisme canonique*

$$H^0(X, E) \simeq H^1(X, E^* \otimes K_X)^*.$$

Preuve. On applique la dualité de Serre au fibré $E \otimes K_X$ en utilisant que $K_X^* \otimes K_X$ est canoniquement isomorphe au fibré trivial. $\square$

11 Théorème de Riemann-Roch et applications

11.1 Préparatifs

Soit X une surface de Riemann compacte, et soient $D \leq D'$ deux diviseurs. On a un morphisme injectif de faisceaux $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{O}_X(D')$, et on peut donc considérer le faisceau quotient

$$\mathcal{F}_D^{D'} := \mathcal{O}_X(D')/\mathcal{O}_X(D).$$

On a alors $(\mathcal{F}_D^{D'})_x = 0$ dès que $x \notin \text{Supp}(D')$ ou même dès que $D'(x) = D(x)$. Plus généralement, on a que $(\mathcal{F}_D^{D'})_x$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $D'(x) - D(x)$.

Lemme 11.1. *Soient $D \leq D'$ deux diviseurs sur X une surface de Riemann compacte.*

1. $\dim H^0(X, \mathcal{F}_D^{D'}) = \deg(D') - \deg(D)$.
2. $H^1(X, \mathcal{F}_D^{D'}) = 0$.

Preuve. Comme $\mathcal{F}_D^{D'}$ est à support fini, on a

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{F}_D^{D'}) &= \dim \prod_{x \in X} (\mathcal{F}_D^{D'})_x \\ &= \sum_{x \in X} (D'(x) - D(x)) \\ &= \deg(D') - \deg(D) \end{aligned}$$

Étant donné un revêtement $\mathcal{U}$ qu'on suppose calculer la cohomologie de $\mathcal{F}_D^{D'}$, il existe un raffinement $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ tel que pour tous $\alpha \neq \beta$, on ait $V_{\alpha\beta} \cap \text{Supp}(D') = \emptyset$. Alors $Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{F}_D^{D'}) = 0$, ce qui prouve le second point. $\square$

On introduit les notations suivantes. Si D est un diviseur sur X , on note $h^q(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \mathcal{O}_X(D)) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, L(D))$ pour $q \in \{0, 1\}$. Enfin, on pose $\chi(D) = h^0(D) - h^1(D)$.

Lemme 11.2. *Si D, D' sont deux diviseurs, alors on a*

$$\chi(D') - \deg(D') = \chi(D) - \deg(D).$$

Preuve. On considère D_0 un diviseur satisfaisant $D_0 \leq D$ et $D_0 \leq D'$. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_0) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{F}_{D_0}^D \longrightarrow 0$$

qui induit, d'après le Lemme 11.1

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D_0)) &\longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_{D_0}^D) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D_0)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Étant donné un complexe exact d'espaces vectoriels, on sait que la somme alternée des dimensions est nulle. Cela donne

$$h^0(D_0) - h^0(D) + (\deg(D) - \deg(D_0)) - h^1(D_0) + h^1(D) = 0$$

ou encore

$$\chi(D_0) - \chi(D) + \deg(D) - \deg(D_0) = 0$$

ce qui prouve le lemme (en faisant le même argument avec D' à la place de D). $\square$

Définition 11.3. Soit X une surface de Riemann compacte. On appelle genre de X et on note g la dimension de l'espace vectoriel $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Un corollaire facile du Lemme 11.2 est le suivant, parfois appelé forme faible du théorème de Riemann-Roch

Théorème 11.4. *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g , et soit D un diviseur sur X . Alors on a*

$$h^0(D) - h^1(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Preuve. Le Lemme 11.2 appliqué à D et 0 montre que $\chi(D) - \deg(D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_X) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 1 - g$. $\square$

11.2 Théorème de Riemann-Roch et premières applications

Rappelons qu'il existe sur X un fibré en droites holomorphe canonique, noté K_X , dont les sections sont les 1-formes holomorphes. On sait d'après le Théorème 8.3 que K_X correspond à un unique diviseur (modulo équivalence linéaire), et donc on peut voir K_X aussi bien comme fibré en droites holomorphe ou diviseur, ou encore faisceau divisoriel. Ainsi, si D est un diviseur, on peut voir le diviseur $K_X + D$ également comme le faisceau également noté $\Omega_X(D)$ des 1-formes méromorphes de diviseur $\geq -D$. Également, si L est un fibré en droites, alors $K_X \otimes L$. Rappelons enfin la dualité de Serre (Théorème 10.6) donnant pour un fibré en droites L un isomorphisme canonique

$$(11.8) \quad H^0(X, K_X \otimes L^*) \simeq H^1(X, L)^*.$$

En particulier, la dimension des deux espaces vectoriels ci-dessus coïncident. En appliquant la formule (11.8) au fibré $L = \mathcal{O}_X$, on obtient l'identité suivante :

Proposition 11.5. *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g . On a*

$$\dim H^0(X, K_X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = g.$$

Autrement dit, il existe exactement g formes holomorphes indépendantes sur X .

En notant $h^0(L) = \dim H^0(X, L)$, on en déduit du fait que tout fibré en droites holomorphes correspond à un diviseur, de l'identité (11.8) et du Théorème 11.4 la forme forte suivante du théorème de Riemann-Roch

Théorème 11.6 (Riemann-Roch). *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g , et soit L un fibré en droites holomorphe sur X . Alors on a*

$$h^0(L) - h^0(K_X \otimes L^*) = \deg(L) + 1 - g.$$

On a bien sûr la même formule avec les diviseurs. Une application importante est la suivante :

Proposition 11.7. *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g . Alors*

$$\deg(K_X) = 2g - 2.$$

Autrement dit, le diviseur $\operatorname{div}(\omega)$ de toute 1-forme méromorphe non-nulle ω sur X est de degré $2g - 2$.

Preuve. On applique simplement le Théorème 11.6 au fibré $L = K_X$ puis on utilise la Proposition 11.5. □

Soit maintenant $F : X \rightarrow Y$ un morphisme non constant entre surfaces de Riemann compactes X, Y . Rappelons qu'on a défini la ramification de F , notée R_F , par

$$R_F := \sum_{x \in X} (m_x(F) - 1) = \sum_{y \in Y} [d(F) - \#(F^{-1}(y))].$$

Grâce au Théorème 3.22, l'existence de formes méromorphes (Théorème 8.3) et la Proposition 11.7, on déduit l'énoncé suivant

Théorème 11.8 (Formule de Riemann-Hurwitz). *Soit $F : X \rightarrow Y$ un morphisme non constant entre surfaces de Riemann compactes de genres respectifs g_X et g_Y . On a*

$$2g_X - 2 = d(F) \cdot (2g_Y - 2) + R_F$$

Étant donné un fibré en droites holomorphe L sur une surface de Riemann compacte X , on voudrait pouvoir calculer la dimension de l'espace de ses sections globales, $h^0(L)$. Le théorème de Riemann-Roch nous permet de faire ça si on connaît a priori $h^0(K_X \otimes L^*)$. Il est donc utile de savoir quand ce dernier nombre est nul.

Lemme 11.9. *Soient X une surface de Riemann compacte et L un fibré en droites holomorphe. On suppose que L admet une section holomorphe non-nulle s .*

1. *On a $\deg(L) \geq 0$.*
2. *Si $\deg(L) = 0$, alors $L \simeq \mathcal{O}_X$.*

Preuve. On sait que $\deg(L) = \deg(s)$ et comme s est holomorphe, on a $\deg(L) \geq 0$. Si $\deg(L) = 0$, alors s ne s'annule pas et en vertu du Lemme 7.9, L est trivial. $\square$
On en déduit le résultat suivant :

Proposition 11.10. *Soient X une surface de Riemann compacte de genre g et L un fibré en droites de degré $\deg(L) > 2g - 2$. Alors*

$$h^0(K_X \otimes L^*) = 0 \quad \text{et} \quad h^0(L) = \deg(L) + 1 - g.$$

Preuve. On a $\deg(K_X \otimes L^*) = 2g - 2 - \deg(L) < 0$. Le résultat découle alors du Lemme 11.9 et du Théorème 11.6. $\square$

Corollaire 11.11. *Toute surface de Riemann compacte de genre zéro est isomorphe à $\mathbb{P}^1$.*

Preuve. Soit $x \in X$. Par la Proposition 11.10, on a que le diviseur $D = (x)$ de degré un vérifie $h^0(D) = 2$. En particulier, il existe une fonction méromorphe non constante f avec $\text{div}(f) \geq -(x)$, ce qui veut dire que f est holomorphe sur $X \setminus \{x\}$ et a un pôle simple en x . Le résultat découle alors du Corollaire 2.12. $\square$

11.3 Plongement projectif

La Proposition 11.10 est extrêmement utile car elle donne le nombre exact de sections globales (indépendantes) de L dès que le degré de L est assez grand. Par exemple, si on impose que $L = L(D)$ vérifie $\deg(D) > 2g - 1$, alors pour tout point $P \in X$, on a $h^0(L(D - P)) = h^0(L(D)) - 1$. En considérant la section $s_P \in H^0(X, \mathcal{O}_X(P))$ de diviseur (P) on en déduit une application linéaire injective

$$\varphi : H^0(X, L(D - P)) \longrightarrow H^0(X, L(D))$$

via la multiplication par s_P . Alors, il est clair que l'image de φ coïncide avec les sections de $L(D)$ qui s'annulent en P . Par comparaison des dimensions, on en déduit

Proposition 11.12. *Soient X une surface de Riemann compacte de genre g , L un fibré en droites de degré $\deg(L) > 2g - 1$ et $P \in X$ un point. Alors il existe $s \in H^0(X, L)$ telle que $s(P) \neq 0$.*

En augmentant le degré de L , on peut même séparer deux points donnés par les sections globales de L :

Proposition 11.13. *Soient X une surface de Riemann compacte de genre g , L un fibré en droites de degré $\deg(L) > 2g$. Alors*

1. *Si $P, Q \in X$ sont deux points distincts, il existe $s \in H^0(X, L)$ telle que $s(P) = 0$ et $s(Q) \neq 0$.*
2. *Si $P \in X$, il existe $s \in H^0(X, L)$ telle que $\text{ord}_P(s) = 1$.*

Preuve. Par la Proposition 11.12, il existe $s' \in H^0(X, L \otimes L(-P))$ telle que $s'(Q) \neq 0$. Alors, la section $s := s' \otimes s_P \in H^0(X, L)$ satisfait aux conclusions désirées (à la fois si $P \neq Q$ ou si $P = Q$). $\square$

Soit maintenant L un fibré en droites de degré assez grand, ie $\deg(L) > 2g$. On choisit une base $(s_0, \dots, s_N)$ de l'espace $H^0(X, L)$. Étant donné un point $x \in X$, on peut construire un élément $f(x) \in \mathbb{P}^N$ de la manière suivante. On choisit un élément non-nul $e_x \in L_x$, et alors il existe un unique $(N+1)$ -uplet de nombres complexes $(\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, on ait $s_i(x) = \lambda_i e_x$. Si on choisit un autre vecteur $e'_x \in L_x \setminus \{0\}$, alors on obtient un autre $(N+1)$ -uplet de nombres complexes $(\lambda'_0, \dots, \lambda'_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$. Ces vecteurs sont reliés entre eux. En effet, si $t \in \mathbb{C}^*$ est le nombre complexe tel que $e_x = t e'_x$, alors on a $\lambda'_i = t \lambda_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$. Ainsi, l'élément $[\lambda_0 : \dots : \lambda_N] \in \mathbb{P}^N$ est canoniquement défini. Par abus de notation on écrira cet élément $[s_0(x) : \dots : s_N(x)]$.

Théorème 11.14. *Soit maintenant L un fibré en droites tel que $\deg(L) > 2g$. Alors, l'application*

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ x &\longmapsto [s_0(x) : \dots : s_N(x)] \end{aligned}$$

est un plongement holomorphe.

Preuve. Il y a quatre choses à prouver. D'abord, il faut voir que f est bien définie, qu'elle est holomorphe, injective, et à différentielle injective.

1. Le fait que f soit bien définie provient de la Proposition 11.12.
2. Soit $x \in X$, et soit U un petit ouvert autour de x . Quitte à permuter les coordonnées et restreindre U , on peut supposer que $s_0(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$. Ainsi, il existe un unique N -uplet de fonctions holomorphes $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sur U telles que $s_i(z) = \lambda_i(z) s_0(z)$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$ et $z \in U$. Il s'ensuit que $f(U)$ est inclus dans la carte affine $U_0 = \{z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^N$, et l'application f s'y lit alors $f(z) = (\lambda_1(z), \dots, \lambda_N(z))$ qui est bien holomorphe.
3. Soient $x, y \in X$ deux points distincts. Par la Proposition 11.13, il existe $s \in H^0(X, L)$ telle que $s(x) = 0$ et $s(y) \neq 0$. Il existe un (unique) $(N+1)$ -uplet $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ tel que $s = \sum a_i s_i$. Considérons l'hyperplan $H = \{[z_0 : \dots : z_N] \in \mathbb{P}^N; \sum a_i z_i = 0\}$. On a alors $f(x) \in H$ et $f(y) \notin H$, d'où l'injectivité de f .

4. Soit $x \in X$; on veut montrer que $df(x) \neq 0$. C'est une question locale, donc on peut travailler sur un petit ouvert U contenant x . De même que précédemment, on suppose que s_0 ne s'annule pas sur U . Par la Proposition 11.13, il existe $s \in H^0(X, L)$ telle que $\text{ord}_x(s) = 1$. On décompose $s = \sum_{i=0}^N a_i s_i$ suivant la base choisie, puis on écrit $s_i(z) = \lambda_i(z) s_0(z)$ comme précédemment de sorte que $f(x) = (\lambda_1(z), \dots, \lambda_N(z))$. Alors dans cette carte, on a

$$df(z) = \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial z}(x), \dots, \frac{\partial \lambda_N}{\partial z}(x) \right).$$

Par ailleurs, on a $s(z) = (\sum_{i=0}^N a_i \lambda_i(z)) \cdot s_0(z)$ avec $\lambda_0 \equiv 1$. La propriété $\text{ord}_x(s) = 1$ se traduit par le fait que $\sum_{i=0}^N a_i \lambda_i(x) = 0$ et $\sum_{i=0}^N a_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial z}(x) \neq 0$. On a $(a_1, \dots, a_N) \neq 0$, sans quoi on aurait $a_0 = 0$ par la première équation ; enfin l'identité $\frac{\partial \lambda_0}{\partial z}(x) = 0$ implique que $df(x) \neq 0$. $\square$

12 Courbes algébriques projectives

12.1 Degré d'une courbe algébrique projective

Rappelons la définition de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ où $u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*, u = \lambda v$. Il existe une projection canonique

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$$

et on note $[z_0 : \dots : z_n] = \pi(z_0, \dots, z_n)$ les coordonnées homogènes associées. L'espace $\mathbb{P}^n$ est recouvert par les ouverts dits affines $U_i = \pi(\{z_i \neq 0\} \subset \mathbb{C}^{n+1})$. Ces ouverts U_i sont biholomorphes à $\mathbb{C}^n$ via l'application $\varphi_i : \mathbb{C}^n \rightarrow U_i$,

$$\varphi_i : (w_0, \dots, \widehat{w_i}, \dots, w_n) \mapsto [w_0 : \dots : w_{i-1} : 1 : w_{i+1} : \dots : w_n]$$

dont l'inverse est donnée par $U_i \ni [z_0 : \dots : z_n] \mapsto (\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i})$.

Étant donnés des polynômes homogènes $f_1, \dots, f_d \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$, le lieu de leur zéros communs $Z = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; f_1(z) = \dots = f_d(z) = 0\}$ est invariant sous l'action de $\mathbb{C}^*$, ie $Z = \pi^{-1}(\pi(Z))$. On appelle $\pi(Z)$ une sous-variété algébrique projective.

Exemple 12.1. Le polynôme $f(z_0, \dots, z_n) = z_0$ est homogène de degré un, son lieu des zéros dans $\mathbb{P}^n$ est égal à $\{[0 : z_1 : \dots : z_n], z_i \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$.

Définition 12.2. Un hyperplan $H \subset \mathbb{P}^n$ est le lieu des zéros d'un polynôme homogène de degré un. Plus généralement, on appelle hypersurface de degré d de $\mathbb{P}^n$ tout sous-ensemble algébrique $G \subset \mathbb{P}^n$ obtenu comme lieu des zéros d'un polynôme homogène g de degré d .

Définition 12.3. Une courbe algébrique projective est une surface de Riemann compacte X munie d'un plongement holomorphe $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ tel que $f(X)$ est une sous-variété algébrique de $\mathbb{P}^n$.

Soit maintenant $X \subset \mathbb{P}^n$ une courbe algébrique et $G = (g = 0)$ une hypersurface de degré d telle que $X \not\subset G$. On veut comprendre le lieu des zéros de $g|_X$ avec multiplicité. Pour ce faire, on se place en un point $x \in X$ où $g(x) = 0$, et on choisit un hyperplan $H = (h = 0)$ qui ne passe pas par x . Alors, la fraction $\frac{g}{h^d}$ définit une *fonction* méromorphe

sur $\mathbb{P}^n$ et induit une fonction méromorphe sur X qui s'annule en x . On note $\text{div}(g)(x)$ l'ordre d'annulation de cette fonction en x . Notons que si $H' = (h' = 0)$ est un autre hyperplan ne passant pas par x , alors on a $\frac{g}{h^d} = \frac{g}{h'^d} \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^d$ et h/h' est holomorphe non-nulle au voisinage de x , donc l'ordre d'annulation des fonctions $\frac{g}{h^d}$ et $\frac{g}{h'^d}$ en x coïncident. Enfin, si $x \in X \setminus G$, on note $\text{div}(g)(x) = 0$.

Définition 12.4. Si $X \subset \mathbb{P}^n$ une courbe algébrique projective et $G = (g = 0)$ une hypersurface de degré d telle que $X \not\subset G$, on définit le diviseur d'intersection $\text{div}(g)$ par $\text{div}(g) = \sum_{x \in X} \text{div}(g)(x) \cdot (x)$. C'est un diviseur effectif dont le support est exactement $X \cap G$.

Lemme 12.5. Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une courbe algébrique projective et soient $G_1 = (g_1 = 0)$, $G_2 = (g_2 = 0)$ deux hypersurfaces de même degré ne contenant pas X . Alors $f = \frac{g_1}{g_2}$ est une fonction méromorphe sur X dont le diviseur est donné par

$$\text{div}(f) = \text{div}(g_1) - \text{div}(g_2).$$

Preuve. Soit d le degré de g_1 (ou g_2). Étant donné un point $x \in X$, il existe un hyperplan $H = (h = 0)$ ne passant pas par x . Alors $\text{div}(g_1)(x)$ et $\text{div}(g_2)(x)$ sont donnés par les ordres d'annulation respectifs de g_1/h^d et g_2/h^d en x . Comme $f = \frac{g_1}{g_2} = \frac{g_1/h^d}{g_2/h^d}$, on a $\text{ord}_x(f) = \text{ord}_x(\frac{g_1}{h^d}) - \text{ord}_x(\frac{g_2}{h^d})$ ce qui conclut. $\square$

En conséquence, on voit que si G_1 et G_2 sont deux hypersurfaces de même degré ne contenant pas X , alors $\text{div}(g_1)$ et $\text{div}(g_2)$ sont deux diviseurs effectifs sur X de même degré. Ceci permet la définition suivante :

Définition 12.6. Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une courbe algébrique projective. On appelle degré de X et on note $\deg(X)$ le degré du diviseur d'intersection $\text{div}(h)$ pour n'importe quel hyperplan $H = (h = 0)$ ne contenant pas X .

Exemple 12.7. Pour le plongement standard de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ donné par $i : [u : v] \mapsto [u : v : 0]$, on a $\deg(i(\mathbb{P}^1)) = 1$. En revanche, on peut plonger $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ par $j : [u : v] \mapsto [u^2 : uv : v^2]$ et alors $\deg(j(\mathbb{P}^1)) = 2$. On verra un énoncé plus général avec la Proposition 12.10.

Proposition 12.8. Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une courbe algébrique projective de degré d et soit $G = (g = 0)$ une hypersurface de degré e ne contenant pas X . Alors

$$\deg(\text{div}(g)) = \deg(X) \cdot \deg(G) = d \cdot e.$$

Preuve. Soit $H = (h = 0)$ une hypersurface ne contenant pas X . Par le Lemme 12.5, $f := g/h^e$ est une fonction méromorphe sur X telle que $\text{div}(f) = \text{div}(g) - \text{div}(h^e)$. Comme X est compacte, on en déduit que ces deux diviseurs ont même degré. Mais $\deg(\text{div}(h^e)) = \deg(e \cdot \text{div}(h)) = e \cdot \deg(X)$, ce qui conclut. $\square$

12.2 Courbes planes

Une grande catégorie d'exemples est formée par celle des courbes planes. Une courbe plane X est définie comme la projection du lieu des zéros d'un polynôme homogène $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ tel que $\{\nabla f = 0\} \cap \{f = 0\} = \{0\}$.

Proposition 12.9. *Il existe une structure de surface de Riemann sur toute courbe algébrique plane.*

Preuve. Tout d'abord, regardons $X = (f = 0) \subset \mathbb{P}^2$ dans la carte affine $U_0 = (z_0 \neq 0)$ de $\mathbb{P}^2$. Sur U_0 , on prend les coordonnées $w_i = z_i/z_0$ pour $i = 1, 2$ et on a alors on a $X \cap U_0 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2; g(w_1, w_2) := f(1, w_1, w_2) = 0\}$. Pour voir que $X \cap U_0$ admet une structure de surface de Riemann, il suffit de montrer que le gradient de g ne s'annule pas le long de $(g = 0)$. Mais si $\nabla(g)$ s'annule en un point $p \in (g = 0)$, alors la formule d'Euler, valable pour tout polynôme homogène $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ de degré d

$$\sum_{i=0}^2 z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} = d \cdot f$$

montre que $\nabla f(p) = 0$ également, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. On voit ainsi que $X \cap U_0$ admet naturellement une structure de surface de Riemann, et de même pour $X \cap U_1$ et $X \cap U_2$. Par construction, ces structures sont compatibles. $\square$

Proposition 12.10. *Soit $X = (f = 0) \subset \mathbb{P}^2$ une courbe plane définie par un polynôme homogène f de degré d . Alors on a*

$$\deg(X) = d.$$

Preuve. Soit $H = (h = 0)$ un hyperplan de $\mathbb{P}^2$ ne contenant pas X . Quitte à changer de coordonnées, on peut supposer que $h = z_0$ et que $[0 : 0 : 1] \notin X$. Ainsi, z_0 et z_1 ne s'annulent jamais simultanément sur X , et la quantité z_0/z_1 définit une fonction méromorphe $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{C}$. Il s'ensuit que $\text{div}(h)$ est exactement le diviseur des zéros de φ .

Soit $\bar{\varphi} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme associé à φ . Le morphisme $\bar{\varphi}$ n'est rien d'autre que la projection $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1, [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0 : z_1]$ sur l'hyperplan $\mathbb{P}^1 \simeq (z_2 = 0) \subset \mathbb{P}^2$. Le degré de $\text{div}(h)$ est donc $d_0(\bar{\varphi}) := \sum_{\varphi(x)=0} \text{ord}_x(\varphi)$ qui coïncide avec le degré $d(\bar{\varphi})$ par le Théorème 2.8.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ général. Alors $\varphi(x) = \lambda$ signifie que $x = [z_0 : z_1 : z_2]$ satisfait $z_0 = \lambda z_1$ ainsi que $f(x) = 0$. Si $\lambda \neq 0$, alors ni z_0 ni z_1 ne peut être nul car $[0 : 0 : 1] \notin X$ et donc tous les points $x \in \varphi^{-1}(\lambda)$ s'écrivent sous la forme $[\lambda : 1 : w]$ avec $f(\lambda, 1, w) = 0$. Pour λ fixé, il s'agit d'une équation polynomiale en w de degré d , et il y a d solutions. Si λ est général, ces solutions sont distinctes, et donc la fibre générique de φ a cardinal d (en effet, le seul cas où cela ne se produirait pas est si f ne dépendait pas de z_0 . Mais alors on aurait soit $\deg(f) = 1$ auquel cas la conclusion de la proposition est triviale soit $(1, 0, 0) \in (f = 0) \cap (\nabla f = 0)$ ce qui contredit l'hypothèse sur X). Ainsi, φ est de degré d , ce qui conclut. $\square$

Soit $X = (f = 0) \subset \mathbb{P}^2$ une courbe algébrique plane telle que $[0 : 1 : 0] \notin X$. On peut considérer deux diviseurs sur X . Tout d'abord, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est un polynôme homogène non-nul sur X et on peut prendre son diviseur. Par ailleurs, la projection $\pi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ définie par $\pi([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0 : z_2]$ définit alors un morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ dont on peut considérer le diviseur de ramification R_π . On a alors

Proposition 12.11. *Dans la situation ci-dessus, on a*

$$\text{div}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = R_\pi.$$

Preuve. On va se contenter de prouver l'assertion dans l'ouvert affine $U_2 = \{z_2 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2$. On a alors des coordonnées $x = z_0/z_2$ et $y = z_1/z_2$ dans lesquelles π s'écrit $\pi(x, y) = x$. Par ailleurs, sur U_2 , X est donnée par l'équation $f(x, y, 1) = 0$.

Soit $p = (x_0, y_0) \in U_2$ un point où $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annule. Comme X est lisse, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est non nul en p et par le théorème des fonctions implicites, y est une coordonnée locale pour X . De plus, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = g(y)$ pour une certaine fonction holomorphe g . Sur ce voisinage, on a $f(g(y), y) \equiv 0$ et donc $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g'(y) + \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$. Sur ce même voisinage, la projection $\pi|_X$ s'écrit $y \mapsto g(y)$, et donc $m_p(\pi) = \text{ord}_p(g') + 1 = \text{ord}_p(\frac{\partial f}{\partial y}) + 1$ car $\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$.

Enfin, si $\frac{\partial f}{\partial y}$ est non-nul en p , alors x est une coordonnée locale pour x , on trouve une fonction h telle que $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = h(x)$ et alors π s'écrit $x \mapsto x$ qui est non ramifiée. $\square$

Théorème 12.12 (Formule de Plücker). *Le genre g d'une courbe algébrique plane X de degré d est donné par*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Preuve. On écrit $X = (f = 0) \subset \mathbb{P}^2$, et on sait par la Proposition 12.10 que f est de degré d . On peut supposer que $[0 : 1 : 0] \notin X$, et on considère alors la projection $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ définie par $\pi([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0 : z_2]$. Par la preuve de la Proposition 12.10, on a que π est de degré d , et par la Proposition 12.11 ci-dessus, le diviseur de ramification de π est égal au diviseur d'intersection $\text{div}(\frac{\partial f}{\partial y})$. Par la Proposition 12.8, le degré de ce diviseur est $d(d-1)$. La formule de Riemann-Hurwitz, ie Théorème 11.8, montre alors que

$$2g - 2 = d \cdot (-2) + d(d-1)$$

d'où $2g = -2(d-1) + d(d-1) = (d-1)(d-2)$. $\square$

Références

- [1] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the 1977 German original by Bruce Gilligan, Reprint of the 1981 English translation.
- [2] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [3] Jacques Lafontaine. *An introduction to differential manifolds*. Springer, Cham, second edition, 2015.
- [4] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [5] Raghavan Narasimhan. *Compact Riemann surfaces*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.